UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI PALERMO

Dottorato di ricerca in ***Fisica Applicata***

Indirizzo ***Storia e didattica delle Matematiche, della Fisica e della Chimica***

Dipartimento di ***Fisica e Chimica***

SSD MAT/04

L'idea di iperspazio e l'evoluzione del pensiero geometrico al quadridimensionale

DOTTORANDO	COORDINATORE	REFERENTE DI INDIRIZZO
Alberto Occhipinti	Bernardo Spagnolo	Aurelio Agliolo Gallitto

TUTOR	CO TUTOR
Cinzia Cerroni	Rossana Tazzioli

CICLO XXVI - 2017

Indice

Introduzione

La geometria ha le sue origini con l’esigenza dell’uomo di misurare le grandezze lineari che lo circondano. Duemilasettecento anni fa nasceva un nuovo modo di fare geometria: Euclide ha formulato e messo per iscritto le “regole logiche” che permettono di analizzare analiticamente le figure piane e tridimensionali percepibili dai sensi umani e ha dimostrato, a partire da qualche postulato che, sebbene i poligoni regolari fossero in numero infinito, esistono solo cinque poliedri regolari.

Fino al XIX secolo gran parte dei ragionamenti matematici erano basati sulle considerazioni del grande matematico greco, e si basavano sulla premessa che lo spazio naturale avesse le caratteristiche intrinseche della concezione euclidea e descrivibile in base ai suoi princìpi.

L’analisi della geometria piana è basata sul fatto che ogni punto è univocamente associabile ad una coppia di coordinate che si possono determinare proiettandolo su due assi perpendicolari che rappresentano le due dimensioni del piano. La geometria sul piano può essere affrontata in modo descrittivo e sintetico nel modo in cui faceva Euclide: descriveva una figura geometrica definendola in modo univoco e ne utilizzava le proprietà per poter dimostrare in modo rigoroso teoremi e proposizioni.

Si può affrontare in entrambi i modi anche lo studio della geometria tridimensionale. Se si vogliono studiare sistemi tridimensionali sarà necessario associare ad ogni punto dello spazio una terna di coordinate determinabili proiettandolo su tre assi perpendicolari tra loro e passanti dallo stesso punto. Tali rette sono le tre dimensioni spaziali che caratterizzano lo spazio che siamo in grado di percepire. Anche in questo caso si può affrontare lo studio delle figure tridimensionali in modo descrittivo, cercando di classificare le figure geometriche e i poliedri in base alla forma ed alle proprietà geometriche.

Attraverso un viaggio storico di quasi due secoli, il presente lavoro vuole analizzare le situazioni in cui lo studio della geometria iperdimensionale ha avuto la sua genesi e la sua evoluzione.

Lo studio della geometria quadridimensionale nasce nei primi anni del XIX secolo, mentre si è alle prese con i fondamenti della geometria non euclidea, e costituisce un solido ma sottile filo conduttore tra la realtà osservata e la visione di un mondo descritto da un modello matematico che prescinda dal cosiddetto "postulato delle parallele".

Questa storia comincia quindi dall'appendice ad un articolo di Farkas Bolyai, appendice redatta dal figlio János, in cui si comincia a pensare ad una geometria completamente indipendente dal postulato delle parallele formulato duemila anni prima da Euclide. Grandi e noti nomi della matematica mondiale quali Carl Friedrich Gauss, Joseph-Louis Lagrange, Augustin-Louis Cauchy, Nicolaj Ivanovič Lobačevskij (e non solo) nel tentativo di trovare le fondamenta di una geometria ben strutturata avevano dato l'input verso una nuova visione della realtà che prescindeva dagli antichi canoni euclidei, e preludeva alla *Habilitationvortrag* di Bernhard Riemann che comincia a porre il problema di una geometria che non fosse limitata allo sviluppo tridimensionale.

In realtà colui il quale approfondisce dal punto di vista dello studio sistematico delle figure nell'iperspazio la questione è Ludwig Schläfli che, a partire dallo studio degli integrali multipli, analizza lo spazio pluridimensionale e definisce ciò che oggi vengono chiamati politopi, pur senza dare una immagine visualizzabile di ciò che descrive in modo molto sistematico anche attraverso i coefficienti che prendono il suo nome.

Nonostante lo si possa considerare un informatissimo pioniere dello studio analitico della geometria iperdimensionale, Schläfli non è molto citato dai suoi contemporanei e, se non si considera la traduzione di alcuni capitoli del suo lavoro da parte di Arthur Cayley in inglese (la cui versione italiana viene proposta in appendice), non si evince alcuna traccia delle sue analisi da parte di cultori della materia quali Julius Plücker, Hermann Ludwig Ferdinand Von Helmholtz, Eugenio Beltrami, Riccardo De Paolis, Giuseppe Veronese, Corrado Segre e Giuseppe Peano, i quali approfondiscono il tema seguendo due punti di vista differenti: quello analitico, che si preoccupa di dare una descrizione grafica di ciò che si dimostra, e quello più astratto in cui si considerano le entità geometriche quali pure equazioni che non hanno necessariamente un riscontro nella descrizione della realtà, e i punti che costituiscono lo spazio possono essere considerati come oggetti geometrici.

Sarà negli anni '80 del XIX secolo che la geometria iperspaziale diverrà elemento costituente della ricerca matematica. Ciò avviene su vari versanti: da un lato le ipersuperfici geometriche, presentate da un punto di vista analitico, ma visualizzate in vario modo, divengono strumento di lavoro essenziali per svariate branche della matematica. Per esempio in geometria algebrica, soprattutto su impulso di Veronese, Segre e Bertini, daranno vita a un filone fondamentale della cosiddetta "scuola geometrica italiana". D'altro canto circa contemporaneamente, lo studio dei politopi e la loro rappresentazione grafica darà vita a un ampio settore di ricerca per molti versi autonomo, dedicato in larga misura alla loro rappresentazione visiva come proiezioni o sezioni sia in figure prospettiche bidimensionali (Stringham, Schlegel) che in modelli tridimensionali (Schlegel).

Sarà comunque soltanto nei primi decenni del novecento che la tematica sarà ripresa e sistematizzata dalla figlia di George Boole, Alicia. In un primo periodo Alicia esplorerà con Pieter Hendrik Schoute le proiezioni dei politopi nello spazio ordinario, forse ignorando i risultati di Schläfli e Stringham. In un secondo momento dall'incontro e dalla collaborazione con il giovanissimo Harold Scott MacDonald Coxeter, destinato a diventare "*Il re dello spazio infinito*"[1] contribuirà alla nascita della moderna versione della teoria, strettamente legata allo sviluppo dello studio dei gruppi finiti.

L'aspetto divulgativo della questione viene affrontata a partire dalla seconda metà degli anni '70 del XIX secolo da molti matematici quali Sylvester, Beltrami, Helmholtz e Casorati da un punto di vista matematico e soprattutto epistemologico. In questo caso la possibilità di visualizzare e immaginare l'iperspazio, soprattutto attraverso ben noti esempi della possibile visualizzazione della terza dimensione da parte di esseri razionali bidimensionali, ha come obiettivo l'esame e lo studio dei limiti della conoscenza empirica proveniente dall'interno di un sistema.

Apparentemente molto diverse, ma importanti dal punto di vista della diffusione e della popolarizzazione degli iperspazi sono poi le fughe in avanti in senso parapsicologico dall'astrofisico tedesco Johann Karl Friedrich Zöllner, il cui lavoro del ha ispirato diversi autori successivi più impegnati sul piano meramente divulgativo. Tra questi il più famoso è certamente Edwin Abbott Abbott che con il suo celeberrimo "*Flatland*" nel 1884 è riuscito a spiegare a tanti "non addetti" la questione della dimensione successiva alla terza, ma al suo fianco si può porre sicuramente Hinton, cognato di Alicia Boole e insegnante di matematica di scuola secondaria che, oltre alcune pubblicazioni a carattere scientifico, si è dedicato a scrivere diversi testi divulgativi sul tema dello spazio iperdimensionale.

A questa parte divulgativa è dedicata una particolare attenzione poiché costituisce la base di un possibile impegno didattico il cui progetto viene esposto nelle conclusioni.

---

[1] La giornalista scientifica e biografa canadese Siobhan Roberts ha dedicato il volume [ROE] per raccontare l'intensa vita del geometra londinese vissuto a lungo tempo in Canada.

Notiamo comunque come, nella pur abbondante letteratura sull'argomento, i vari piani in cui si svolgono le vicende relative agli iperspazi, quello cioè algebrico–geometrico e topologico, quello relativo ai politopi e quello più direttamente divulgativo restino spesso nettamente separati. Poiché invece è nostra convinzione che tali piani siano strettamente legati e non solo sul piano cronologico, abbiamo cercato di tenerli insieme, sia pure limitandoci per il momento a meri accenni per taluni di essi.

Va comunque precisato che l'avvento delle tecnologie informatiche ha reso, in tempi relativamente recenti, particolarmente interessanti le tecniche di rappresentazione degli iperspazi, anche al fine della creazione dei cosiddetti spazi virtuali, indipendentemente dalla "realtà" delle dimensioni superiori. Tale interesse si è anche riproposto nell'ambito delle finalità più propriamente didattiche che, come detto, sono strettamente legate a quelle divulgative[2].

In Appendice è riportata anche una possibile costruzione, con metodi di software geometrico elementare, (nella fattispecie abbiamo fatto uso di Geogebra), della proiezione di un ipercubo su di un piano. Uno sviluppo possibile di questo lavoro consisterebbe quindi nella sperimentazione in una classe degli istituti superiori di queste proposte di lavoro. Purtroppo l'andamento della vita scolastica in questo ultimo anno, ha reso impraticabile per il momento questo obiettivo. Comunque, a nostro avviso, i contenuti di questa tesi si prestano a un processo di formazione degli insegnanti che, attraverso un filo storico assai ricco, può condurre a un approfondimento dei fondamenti della geometria e quindi a una più precisa indicazioni di tematiche ricche e stimolanti che gli attuali sviluppi delle tecnologie informatiche e dei collegati concetti di spazi virtuali ha reso particolarmente interessanti.

[2] A tale proposito può essere molto utile consultare Maria Dedò, in [DED2015], il progetto Matematita all'indirizzo web http://www.matematita.it/. Nel testo di Anthony Robbin [ROB], invece, si affronta la rappresentazione delle figure geometriche quadridimensionali all'elaboratore elettronico.

È noto che la geometria presuppone, come qualcosa di dato, sia il concetto di spazio, sia i primi concetti fondamentali per le costruzioni nello spazio. Di essi dà soltanto definizioni nominali, mentre le determinazioni essenziali compaiono sotto forma di assiomi.

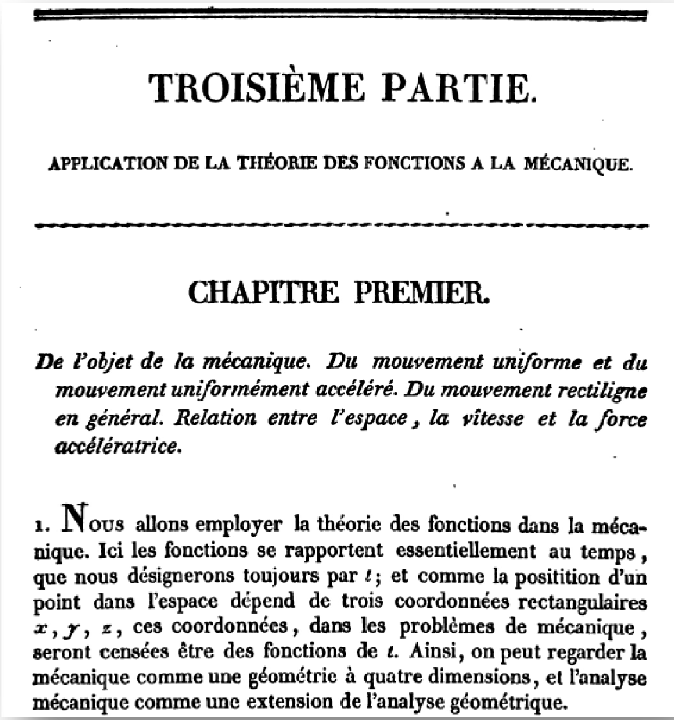
Bernhard Riemann

1. Precursori

Era il 10 giugno del 1854 quando Bernhard Riemann discuteva, al cospetto del Consiglio di Facoltà e del suo maestro Carl Friedrich Gauss, la sua *Über die Hypothesen, welche der Geometrie zu Grunde liegen* [Sulle ipotesi che stanno alla base della geometria], la sua lezione inaugurale alla prestigiosa università di Göttingen. In essa egli mostra per la prima volta l'ipotesi dell'esistenza di differenti spazi triestesi del tutto simili localmente all'ordinario spazio euclideo che siamo in grado di percepire grazie ai nostri sensi, ma globalmente completamente diversi tra loro.

In realtà già nel XVIII secolo, sia Leonhard Euler, Jean Baptiste Le Rond D'Alembert e Joseph-Louis Lagrange[3] avevano fatto uso di costruzioni analitiche in *n* variabili; Lagrange nella *Théorie des fonctions analytiques* del 1797, osserva ad esempio che

> *on peut regarder la mécanique comme une géométrie à quatre dimensions, et l'analyse mécanique comme une extension de l'analyse géométrique.*[4]



TROISIÈME PARTIE.

APPLICATION DE LA THÉORIE DES FONCTIONS A LA MÉCANIQUE.

CHAPITRE PREMIER.

De l'objet de la mécanique. Du mouvement uniforme et du mouvement uniformément accéléré. Du mouvement rectiligne en général. Relation entre l'espace, la vitesse et la force accélératrice.

1. Nous allons employer la théorie des fonctions dans la mécanique. Ici les fonctions se rapportent essentiellement au temps, que nous désignerons toujours par t; et comme la positition d'un point dans l'espace dépend de trois coordonnées rectangulaires x, y, z, ces coordonnées, dans les problèmes de mécanique, seront censées être des fonctions de t. Ainsi, on peut regarder la mécanique comme une géométrie à quatre dimensions, et l'analyse mécanique comme une extension de l'analyse géométrique.

A parte i timidi accenni precedenti al 1800, si intravedono i primi tentativi di generalizzazione del linguaggio geometrico a dimensioni

[3] Una biografia di Lagrange è pubblicata dalla Utet, [BUR]

[4] Joseph-Louis Lagrange, [LAG], 1813

superiori negli anni trenta del secolo, con Carl Gustav Jacobi, Hermann Günther Grassmann, Julius Plücker, Arthur Cayley, Augustin-Louis Cauchy; essi, con i loro scritti, si sono rivelati dei veri e propri precursori alla trattazione.

Successivamente, nel 1850, Ludwig Schläfli elabora un manoscritto in cui descrive dettagliatamente e analiticamente le figure geometriche di dimensioni pluridimensionali, i politopi, a partire dallo studio analitico di un integrale multiplo[5], ma tale scritto non hanno una grande fortuna nell'immediato e saranno pubblicati postumi nel ventesimo secolo.

Jacobi[6] nella sua memoria del 1834, *De binis quibuslibet functionibus homogeneis secundi ordinis per substitutiones lineares in alias binas transformandis, quae solis quadratis variabilium constant* calcola diversi integrali multipli ed ottiene una formula equivalente al volume di una sfera *n*-dimensionale, ma non si avventura in considerazioni di tipo geometrico.[7]

Plücker, con la sua memoria *Théorèmes généraux concernent les équations d'un degré quelconque entre un nombre quelconque d'inconnues* del 1836 in cui introduce per la prima volta il concetto di coordinate omogenee, si rivelerà insieme a George Boole (con i suoi lavori sulle trasformazioni lineari), un pioniere rispetto ai suoi successori. In realtà per Cayley sarà un ispiratore: questi, nell'articolo "*Chapters in the analytical geometry on (n) dimensions*" del 1845[8], avvalendosi anche della teoria dei determinanti studia problemi analitici a più di tre variabili, cui dà, per la verità soprattutto nel titolo, veste geometrica.

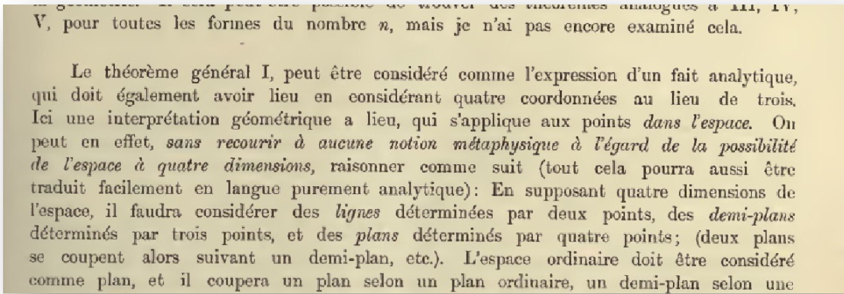
Sembra chiaro il messaggio di Cayley che invita a prescindere da qualsiasi considerazione geometrica o comprensione fisica del risultato ottenuto nel ritrovare un punto a quattro coordinate come soluzione di un problema risolto nella sua trattazione analitica. Il suo punto di vista è quindi puramente analitico.

[5] Tratteremo di tale scritto in seguito.
[6] Per una biografia di Jacobi si può consultare David Hestenes [HES], 1986
[7] Carl Gustav Jacob Jacobi, [JAC], 1884
[8] Arthur Cayley, [CAY1845], 1845

Arthur Cayley[9] (1821-1895), uno dei più prolifici matematici inglesi del suo tempo, nonostante sia entrato nel mondo accademico matematico a 39 anni, ha avuto un passato di studente in matematica d'eccellenza al Trinity College di Cambridge e fino all'età di 25 anni, potendo usufruire di una borsa di studio, vi è rimasto e scrisse diversi articoli di carattere matematico. Poi scelse la professione di notaio e durante il periodo in cui praticò questa professione riuscì a produrre un elevatissimo numero di articoli matematici (più di 250).

Quando gli fu proposto il posto di docente all'università di Cambridge accolse l'incarico con piacere: anche se lo stipendio era notevolmente inferiore quanto meno riuscì ad occuparsi di matematica a tempo pieno e continuò a produrre altri articoli e pubblicazioni: in totale se ne contano più di 650.

Cayley, nell'evoluzione del suo modo di affrontare la problematica della geometria iperdimensionale, è una palese espressione della tendenza del suo tempo: nella prima metà del XIX secolo, infatti, si affronta lo studio della geometria analitica in modo tradizionale. Ad ogni punto di uno spazio *n*-dimensionale, si associa biunivocamente una *n*-pla ordinata.


V, pour toutes les formes du nombre *n*, mais je n'ai pas encore examiné cela.

Le théorème général I, peut être considéré comme l'expression d'un fait analytique, qui doit également avoir lieu en considérant quatre coordonnées au lieu de trois. Ici une interprétation géométrique a lieu, qui s'applique aux points *dans l'espace*. On peut en effet, *sans recourir à aucune notion métaphysique à l'égard de la possibilité de l'espace à quatre dimensions*, raisonner comme suit (tout cela pourra aussi être traduit facilement en langue purement analytique): En supposant quatre dimensions de l'espace, il faudra considérer des *lignes* déterminées par deux points, des *demi-plans* déterminés par trois points, et des *plans* déterminés par quatre points; (deux plans se coupent alors suivant un demi-plan, etc.). L'espace ordinaire doit être considéré comme plan, et il coupera un plan selon un plan ordinaire, un demi-plan selon une

Qualche anno più tardi, riflettendo forse su influsso di Plücker, sull'argomento, scriverà:[10]

> *[...] Le théorème [...] peut être considéré comme l'expression d'un fait analytique, qui doit également avoir lieu en*

[9] Una recente e accurata biografia di Cayley si può leggere in [CRI], 2006
[10] Arthur Cayley in [CAY1846], 1846, p. 321

> *considérant quatre coordonnées au lieu de trois. Ici une interprétation géométrique a lieu, qui s'applique aux points dans l'espace. On peut en effet, sans recouvrir à aucune notion métaphysique à l'égard de la possibilité de l'espace à quatre dimensions, raisonner comme suit […]*

Nel 1847 Cauchy, in modo più esplicito, nell'articolo dal titolo *Mémoire sur les lieux analytiques*[11], si esprime in modo analogo e anch'egli prescinde dal significato che può assumere geometricamente l'iperspazio.

È comunque interessante leggere direttamente ciò che scrive il matematico francese:

> *Concevons maintenant que e nombre des variables x, y, z, … devienne supérieur à trois. Alors chaque système des valeurs de x, y, z, … déterminera ce que nous appellerons un point analytique, dont ces variables seront les coordonnées, (…) De plus, si les diverses variables sont assujetties à diverse conditions représentées par des inégalités, les systèmes de valeurs x, y, z, … pour lesquels ces conditions seront remplies, correspondront à divers points analytiques dont l'ensemble formera e que nous appellerons un lieux analytique. (…) Nous appellerons encore droite analytique un système de points analytiques dont les diverses coordonnées s'exprimerons à l'aide de fonctions linéaires données de l'une entre elles. Enfin la distance de deux points analytiques sera la racine carrée de la somme de carrées des différances entre les coordonnées correspondantes de ces deux points.*

[11] Augustin-Louis Cauchy, [CAU], p. 885 (24 mai 1847)

Egli può quindi concludere:

> *La considération des points et des lieux analytiques fournit le moyen d'éclaircir un grand nombre de questions délicates …*

Naturalmente in questa prospettiva l'iperspazio è soltanto uno strumento al servizio dell'analisi e non ha nulla di filosoficamente interessante.[12]

Un nuovo punto di vista sugli iperspazi è introdotto da Plücker[13] negli anni '40 e poi sviluppato una ventina di anni dopo. Il punto di partenza è contenuto in un lavoro del 1846.[14] Qui Plücker sviluppando una analogia con il caso della dualità, considera l'ordinario spazio tridimensionale non più come costituito dai punti (o dualmente dai piani), ma dalle rette. Dal punto di vista analitico, una retta può essere rappresentata dalle sue equazioni parametriche $\begin{cases} x = az + b \\ y = cz + d \end{cases}$; a questa retta viene associato un punto nello spazio quadridimensionale (a, b, c, d). In questo spazio (S^4) Plücker definisce i complessi, dati dagli zeri di una funzione algebrica $f(x, y, z, t)$. Lo studio dei complessi di rette divenne uno degli argomenti centrali nella ricerca geometrica della seconda metà dell'ottocento.

Purtroppo, questa rappresentazione dell'iperspazio ha un difetto grave: il grado di un complesso non è invariante rispetto al cambiamento di sistema di riferimento nello spazio. Naturalmente questo è un peccato capitale. Plücker supererà questo difetto soltanto nel 1865 [15], introducendo una quinta coordinata, $e = \det\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$.

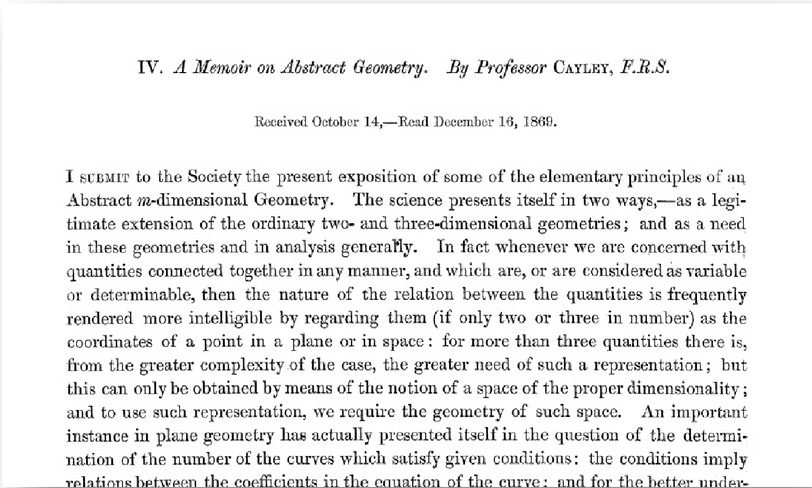
Lo spazio rigato, nell'immagine di Plücker, diveniva quindi una varietà quadridimensionale in uno spazio a cinque dimensioni. Con questa modifica,

[12] Aldo Brigaglia, [BRI1994], pp. 231-261
[13] Una biografia di Plücker risale al 1871, [DRO]
[14] Julius Plücker, [PLU1846], 1846
[15] Julius Plücker, [PLU1865], 1865, pp. 725 – 791.

l’invarianza del grado dei complessi veniva assicurata. Una più radicale modifica, che avrà una profonda influenza su Segre, verrà compiuta nel dicembre 1868 nella tesi di dottorato di Felix Klein[16], allievo di Plücker che era morto nello stesso anno. Klein pone le cose in questo modo: se due punti dello spazio ordinario hanno le coordinate $A \equiv (x_1, x_2, x_3, x_4)$, $B \equiv (y_1, y_2, y_3, y_4)$ la retta che le congiunge è completamente determinata dai minori $r_{ij} = \begin{vmatrix} x_i & x_j \\ y_i & y_i \end{vmatrix}$, soggetti alla condizione $r_{12}r_{34} - r_{13}r_{24} + r_{14}r_{23} = 0$; quest’ultima equazione determina una iperquadrica (la quadrica di Klein) nello spazio proiettivo di cinque dimensioni. Questa determinazione dello spazio rigato costituirà un elemento portante nello studio degli iperspazi nella seconda metà del XIX secolo.

Dopo un ventennio vi è una certa inversione di tendenza e nel 1869 Cayley cambia i termini della questione: egli non esclude, anzi fa suo, il punto di vista di Julius Plücker che abbiamo visto presentato nel 1865, in cui l’idea di iperspazio è legata a quella di spazio in cui l’elemento generatore (il “punto”) invece del punto ordinario è un altro oggetto geometrico. Come abbiamo già anticipato, egli afferma infatti che:

The science presents itself in two ways, as a legitimate extension Of the ordinary two– and three–dimensional geometries ; and as


IV. *A Memoir on Abstract Geometry. By Professor* Cayley, *F.R.S.*

Received October 14,—Read December 16, 1869.

I submit to the Society the present exposition of some of the elementary principles of an Abstract *m*-dimensional Geometry. The science presents itself in two ways,—as a legitimate extension of the ordinary two- and three-dimensional geometries; and as a need in these geometries and in analysis generally. In fact whenever we are concerned with quantities connected together in any manner, and which are, or are considered as variable or determinable, then the nature of the relation between the quantities is frequently rendered more intelligible by regarding them (if only two or three in number) as the coordinates of a point in a plane or in space: for more than three quantities there is, from the greater complexity of the case, the greater need of such a representation; but this can only be obtained by means of the notion of a space of the proper dimensionality; and to use such representation, we require the geometry of such space. An important instance in plane geometry has actually presented itself in the question of the determination of the number of the curves which satisfy given conditions: the conditions imply relations between the coefficients in the equation of the curve; and for the better under-

[16] Di Klein si parla approfonditamente in [PaRo], 1994

> *a need in these geometries and in analysis generally. [...] and to use such representation, we require the geometry of such space.*[17]

Ad esempio lo spazio in cui gli elementi generatori sono coniche: poiché per determinare una conica occorrono cinque coefficienti, lo spazio delle coniche è uno spazio a cinque dimensioni.[18] L’attuale visione della geometria a più dimensioni è quella derivante dalla geometria algebrica, in particolare della scuola italiana su cui torneremo in breve più avanti.

Nello stesso anno 1843, nel quale il giovane Cayley pubblicava la sua geometria analitica ad n dimensioni, lavorando da un punto di vista diverso, più strettamente algebrico, dopo quasi tredici anni di studi in questa direzione, sir William Roman Hamilton riuscì a trovare la soluzione ad un problema che lo impegnava in particolar modo.

Hamilton[19] (1805 – 1865) si era dottorato al Trinity College di Dublino, dove rimase tutta a vita anche come insegnante. Nel 1835 aveva pubblicato un articolo alla British Association a Dublino in cui presentava la teoria dei numeri complessi come coppie ordinate di numeri reali. Nella conclusione della sua relazione si proponeva di riuscire ad estendere i risultati ottenuti alla teoria delle terne e, più in generale, alle *n*-ple. La soluzione al problema giunse quasi inaspettatamente, il 16 ottobre 1843, mentre passeggiava con la moglie sul Brougham Bridge di Dublino, dove egli ebbe un’intuizione illuminante nella determinazione dei prodotti delle terne numeriche dando i natali, di fatto, alle equazioni fondamentali dei quaternioni. L’evento è ancora segnato da una lapide nel detto ponte:

[17] Arthur Cayley, [CAY1869], 1869
[18] Aldo Brigaglia, [BRI1994], 1994
[19] La classica biografia di Hamilton è quella di Robert Percefal Graves, [GRV], 1882–1889; più recente Thomas L. Hankins, [HAN], 1980; uno studio recente sulla storia dei quaternioni, con ricca bibliografia, è la tesi di dottorato della Columbia University di Johannes C. Familton, [FAM], 2015.

Here as he walked by on the 16th of October 1843 Sir William Rowan Hamilton in a flash of genius discovered the fundamental formula for quaternion multiplication $i^2 = j^2 = k^2 = -1$ & cut it on a stone of this bridge.

Un numero complesso può essere identificato da una coppia di numeri reali $(h_1 = x + iy)$ pertanto può essere rappresentativo di uno spazio a due dimensioni, secondo quanto già fatto da tempo da Gauss e Argand. Se si eleva al quadrato tale numero si ottiene un altro numero complesso: $(x+iy)^2 = x^2 + 2ixy - y^2 = \left(x^2 - y^2\right) + i(2xy)$ ed è auspicabile che lo stesso accada anche nel caso in cui il numero sia rappresentato da una terna di componenti. Si possono immaginare numeri rappresentati da terne del tipo: $h_2 = x + iy + iz$. Posto $i^2 = j^2 = -1$ il quadrato della terna diviene: $(x+iy+iz)^2 = x^2 - y^2 - z^2 + i(2xy) + j(2xz) + ij(2yz)$.

L'intuizione di Hamilton fu quella di immaginare che fosse il prodotto $ij = -ji$ e quindi il termine $ij(2yz)$, che in realtà proviene dalla somma $yzij + yzji$ è pari a zero: $yzij + yzji = yz(ij - ij) = 0$.

Da queste considerazioni nasce la prima algebra quadridimensionale non commutativa formata dalle scritture del tipo $x_1 + i\,x_2 + j\,x_3 + k\,x_4$, con $x_i \in \mathbb{R}$, in cui valgono le seguenti equazioni fondamentali:

I. $i^2 = j^2 = k^2 = -1$

II. $i \cdot j = k$, $j \cdot k = i$, $k \cdot i = j$

III. $j \cdot i = -k$, $k \cdot j = -i$, $i \cdot k = -j$

Il punto di forza del concetto di quaternione e che esso può essere visto come la somma tra uno scalare ed un vettore a tre dimensioni. Hamilton introdusse anche l'operatore differenziale $\nabla = i\frac{\partial}{\partial x} + j\frac{\partial}{\partial y} + k\frac{\partial}{\partial z}$ il quale se lo si applica ad un vettore si ottiene un quaternione, la cui parte scalare è detta divergenza mentre la parte vettoriale è detta rotore.

I quaternioni e i loro sottogruppi assunsero presto il ruolo potenziale di coordinate per gli spazi a quattro dimensioni, come successivamente le algebre da essi derivati, come i bicomplessi o gli ottonioni (per dimensione 8)[20].

Nel 1844, l'anno successivo, Grassmann nel *Die Lineale Ausdehnungslehre, ein neuer Zweig der Mathematik*, [Teoria delle grandezze estensive] propone dei nuovi fondamenti per tutta la matematica e comincia con definizioni piuttosto generali di natura filosofica.

Hermann Günther Grassmann[21] (1809–1877) fondamentalmente autodidatta, ricevette l'abilitazione all'insegnamento nell'università di Berlino, e all'insegnamento si dedicò tutta la vita, senza mai accedere alla docenza universitaria.

La sua opera, infatti, non fu immediatamente compresa dai suoi contemporanei per la farraginosità del suo linguaggio. Nicolas Bourbaki nei suoi *Elementi di storia delle matematiche* afferma che "l'opera di Grassmann fu creata in una solitudine morale quasi completa, restò a lungo mal conosciuta a causa della sua originalità ma anche delle brume filosofiche nelle quali, fin dall'inizio, si avviluppa". [22]

[20] Cinzia Cerroni, [CER]

[21] Su Grassmann e la sua opera esiste una vasta bibliografia. Si può consultare Desmond Fearneley-Sander [FeSa], 1979, pp. 809-817; una rassegna vasta si ha in G. Schubring (ed.), [SCHB], 1996; più specificamente dedicato agli aspetti epistemolgici è Paola Cantù, [CAN2010], pp. 91-100, 2010; sull'influenza di Grassmann su Peano, Paolo Freguglia, [FRE] pp. 185 – 195. La sua biografia e dettagliatamente esposta in [PETS], 2009.

[22] Nikolas Bourbaki, [BOU], 1960

Lo storico Crowe afferma che Möbius considera Grassmann "semplicemente illeggibile"[23] mentre sir Hamilton in una frase intrisa del noto humour irlandese, scrive in una delle sue lettere degli anni '40 del XIX secolo indirizzata ad Augustus De Morgan che, se fosse in grado di leggere Grassmann, riuscirebbe anche ad imparare a fumare. Lo stesso Gauss, nonostante avesse lodato l'opera di Grassmann, trovava eccessiva la sua astrattezza filosofica. Per questo motivo gli scritti di Grassmann furono studiati approfonditamente e compresi solo nella sua seconda edizione del 1867, e nella sua opera egli dedusse che se la geometria fosse stata messa nella forma algebrica da lui sostenuta, allora il numero tre non avrebbe avuto un ruolo di privilegio come numero di dimensioni spaziali; il numero di possibili dimensioni di interesse per la geometria è infatti illimitato.[24] In modo esplicito Grassmann mette in risalto il fatto che la geometria deve essere vista come una scienza a parte e non più come una branca della matematica. Egli così si esprime:

> *da lungo tempo mi è apparso chiaro che la geometria in sé stessa non debba in nessun modo essere considerata un ramo della matematica come l'aritmetica o la teoria delle combinazioni; al contrario la geometria riguarda qualcosa che è dato in natura (ossia lo spazio) e che debba esserci un ramo della matematica che in maniera puramente astratta conduca a leggi simili a quelle della geometria che appare vincolata allo spazio. Attraverso la nuova analisi sembrava possibile sviluppare tale settore, puro e astratto, della*

[23] Michael J. Crowe, [CRO], 1967
[24] ivi

> *matematica; in effetti questa nuova analisi [...] si dimostrò essere proprio quella scienza*[25]

Riesaminando il saggio di August Ferdinand Möbius[26], *Der barycentrische Calcul* (1827) Grassmann elabora una "teoria generale delle forme", forme del tutto astratte che possono oggettivarsi in numeri, punti, vettori, aree orientate che possono combinarsi mediante operazioni, connessioni o associazioni che obbediscano a precise regole algebriche. Grassmann riesce ad elaborare un'algebra vettoriale definendo anche il prodotto vettoriale tra vettori e il piano che contiene due vettori linearmente indipendenti come il prodotto vettoriale stesso tra i due vettori.

Queste elaborazioni sono essenziali per arrivare a definire la nozione di forma differenziale, fondamentale tanto in geometria differenziale quanto in fisica matematica. La ripresa di interesse per i lavori di Grassmann avverrà, come per la gran parte delle nuove tematiche geometriche, negli anni '60. Vale forse la pena ricordare che tra i primissimi estimatori dell'opera del matematico di Stettino fu Luigi Cremona. Come mostrato da Freguglia nel lavoro citato non si può sottovalutare l'impatto di Grassmann sulla matematica tedesca.

[25] Hermann Günther Grassmann, [GRA], 1894. Trad. da Claudio Bartocci, [BAR], 2016
[26] Un interessante testo che parla di Möbius è quello di Clifford Pickover, [PIC], 2006

2. L'intuizione di Riemann

Con la sua lezione inaugurale Riemann mostra per la prima volta l'ipotesi dell'esistenza di differenti spazi triestesi del tutto simili localmente all'ordinario spazio euclideo che siamo in grado di percepire grazie ai nostri sensi, ma globalmente completamente diversi tra loro.

Riemann è un allievo di Gauss, anche se l'ha conosciuto soltanto quando il maestro era già in età avanzata e appariva molto poco in sede universitaria. Però ne subisce enormemente l'influenza e ne segue le tracce; sembra che gli scritti di Gauss[27] sulle geometrie non euclidee, in particolare le *Disquisitiones generales circa superficies curvas*, che pubblica nel 1828, non abbiano lasciato indifferente Riemann. Come approfondiremo in seguito, in esso Gauss perviene alla dimostrazione di un teorema che per la sua importanza definisce *egregium*: "se una superficie curva è isometrica ad un'altra superficie, la misura della curvatura in ogni suo punto rimane invariata" e ne evidenzia i risvolti interessanti.

> $$\sqrt{(E'dp^2 + 2F'dp.dq + G'dq^2)}$$
> denotantibus etiam E', F', G' functiones ipsarum p, q. At per ipsam notionem *explicationis* superficiei in superficiem patet, elementa in vtraque superficie correspondentia necessario aequalia esse, adeoque identice fieri
> $$E = E',\ F = F',\ G = G'.$$
> Formula itaque art. praec. sponte perducit ad egregium
>
> THEOREMA. *Si superficies curua in quamcunque aliam superficiem explicatur, mensura curuaturae in singulis punctis inuariata manet.*

In primo luogo non vale il teorema inverso, ovvero se due curve hanno la stessa curvatura Gaussiana allora non è detto che siano isometriche. In secondo luogo non è possibile proiettare tutti i punti di una superficie con una determinata curvatura su tutti i punti di una superficie che presenta una diversa curvatura.

[27] Su Gauss scrive in modo completo Rossana Tazzioli in [TAZ2002], 2002

Ma nonostante la grande potenza del teorema egregium non vi è alcuna prova che da un sistema di riferimento solidale ad una superficie a curvatura Gaussiana costante, sia possibile determinare la curvatura della superficie. Né Gauss né un suo successore ha dimostrato che sia possibile determinare in quante dimensioni si sviluppa una superficie osservandola da un sistema di riferimento solidale alla superficie stessa.

Questa riflessione potrebbe avere destato in Riemann lo stimolo per l'elaborazione delle proprie idee. Egli presenta il tema degli spazi a dimensioni superiori al terzo nel seguente modo:

> *Parti determinate di una varietà, distinte da una nota o da una demarcazione, si chiamano "quanta". Il loro confronto, secondo la quantità, avviene nelle grandezze discrete mediante numerazione, nelle grandezze continue mediante misurazione. La misurazione consiste nella sovrapposizione delle grandezze da confrontare; per misurare è necessario un mezzo atto ad isolare una grandezza come scala di misura per un'altra. In mancanza di ciò, due grandezze si possono confrontare soltanto se l'una è una parte dell'altra, e in questo caso si può stabilire soltanto il più o il meno, ma non il quanto. Le ricerche che si possono intraprendere su di esse, in questo caso, costituiscono una parte generale della teoria delle grandezze, indipendente da determinazioni metriche, in cui le grandezze non vengono considerate come esistenti indipendentemente dalla posizione, né come fossero esprimibili mediante un'unità bensì come domini in una varietà. Tali ricerche sono diventate una necessità in numerosi ambiti della matematica, specialmente per la*

trattazione delle funzioni analitiche a più valori, e proprio nella loro mancanza va probabilmente ricercata la causa principale del fatto che il celebre teorema di Abel e le scoperte di Lagrange, Pfaff e Jacobi, relative alla teoria generale delle equazioni differenziali, sono rimasti tanto ala lungo infruttuosi. Per i fini che ci proponiamo qui sarà tuttavia sufficiente mettere in rilievi due punti di questa parte generale della teoria delle grandezze estese, in cui non viene presupposto nulla che non sia già implicita nel loro concetto. Il primo di questi punti riguarda il sorgere del concetto di varietà pluriestesa, il secondo la possibilità di condurre le determinazioni di luogo di una data varietà a determinazioni di quantità e chiarire quale sia il carattere distintivo di una estensione n-*uplice.*

Se in un concetto, i cui modi di determinazione formano una varietà continua, si passa, secondo modalità definite da un modo di determinazione ad un altro, i modi di determinazione percorsi formano una varietà monoestesa, la cui caratteristica essenziale è che, partendo da ogni suo punto, una successione continua è possibile soltanto in due direzioni, avanti e indietro. Se si immagina ora che questa varietà si trasformi di nuovo in un'altra, del tutto diversa, naturalmente ancora una volta secondo modalità definite, e cioè in modo tale che ogni punto dell'una passi in un punto determinato dell'altra, i modi di determinazione così ottenuti formano insieme una varietà biestesa. In modo analogo si ottiene una varietà triestesa, se si immagina che una varietà

> *biestesa si trasformi, secondo modalità definite, in una del tutto diversa, ed è facile vedere come questa costruzione possa procedere oltre. Se invece di considerare determinabile il concetto, si considera variabile il suo oggetto, allora questa costruzione può essere indicata come una composizione di una variabilità a $n+1$ dimensioni, formata da una variabilità a n dimensioni e da una a una sola dimensione.*[28]

Dopo un approfondimento analitico in cui riprende le determinazioni metriche del "celebre trattato del Consigliere aulico Gauss", Riemann sente l'esigenza di dare una spiegazione geometrica di curvatura di una superficie e una definizione di superficie a curvatura costante, e analizza ciò che accade alle superfici a due estensioni. Riemann si spinge all'applicazione ad uno spazio *n*-esteso, indicando

> *quali sono le condizioni necessarie e sufficienti alla determinazione delle relazioni metriche dello spazio, quando si presupponga l'indipendenza delle linee dalla posizione e la rappresentabilità dell'elemento lineare mediante la radice quadrata di un'espressione differenziale di secondo grado, e quindi la planeità in regioni piccolissime.*
>
> *Queste condizioni si possono esprimere, in primo luogo, in modo tale che la misura di curvatura sia in ogni punto uguale a zero, in tre direzioni di superficie; di conseguenza le relazioni metriche dello spazio sono determinate, quando la somma degli angoli di un triangolo è ovunque uguale a due retti.*

[28] Bernhard Riemann, [RIE2012] 2012.

> *Se però, in secondo luogo, si postula, con Euclide, un'esistenza indipendente dalla posizione, non soltanto per le linee, ma anche per i corpi, allora ne consegue che la misura di curvatura è ovunque costante e quindi la somma degli angoli di un triangolo è determinata, in qualsiasi triangolo, quando è determinata anche in un solo triangolo.*[29]

La possibilità che ha il pensiero di definire coerentemente e poi studiare una moltitudine di spazi triestesi (o anche $n-$estesi) a partire dalle loro proprietà locali viene considerata dai più una incomprensibile stravaganza dei matematici e la percezione diffusa di cosa sia la geometria rimane ferma ai triangoli, ai cerchi e a quel poco che ancora si ricorda di geometria euclidea. In realtà gli enormi sviluppi che in questi 160 anni sono stati compiuti hanno dato la luce a una gran messe di *varietà* le cui caratteristiche qualitative (limitatezza o illimitatezza, finito o infinito, orientabile o non orientabile, compatto o non compatto ecc. ecc.) potevano essere definite rigorosamente in modo da poter decidere sull'esistenza o meno di spazi coerenti con date caratteristiche globali.

> *Il mio lavoro principale riguarda una nuova concezione delle leggi di natura note – una loro riformulazione mediante altri concetti fondamentali, attraverso i quali rendere possibile l'uso dei dati sperimentali, relativi all'azione reciproca di calore, luce, magnetismo ed elettricità, per la ricerca della loro connessione. Sono sto condotto a ciò principalmente dallo studio delle opere di Newton, di Eulero e, per un altro verso, di Herbart.*[30]

[29] Ivi.
[30] Bernhard Riemann, [RIE1876], 1876

Con queste parole Riemann afferma di ispirarsi a Johann Friedrich Herbart[31] nella stesura della lezione inaugurale all'università di Göttingen[32]. Sembra infatti che Riemann avesse seguito con grande interesse lezioni di filosofia e pedagogia tenuti da Rudolf Hermann Lotze[33]. Questi, successore di Herbart, nonostante il rispetto verso il suo predecessore, muoveva forti critiche alle sue idee e teneva un serrato confronto con le sue teorie: probabilmente proprio questo potrebbe essere il motivo per cui Riemann ha studiato approfonditamente la filosofia herbartiana, come potrebbe anche aver ricevuto influenze dal fisico Wilhelm Weber il quale nell'autunno del 1850 aveva fondato con Gauss un seminario di fisica matematica frequentato da Riemann. Weber aveva stretto con Herbart intensi rapporti personali e scientifici e, nonostante la responsabilità di Herbart nel suo allontanamento dall'Università di Göttingen nel 1837 legato alla vicenda dei Sette di Göttingen, ne apprezzava profondamente la filosofia.

Inoltre Herbart era apprezzato anche da Gauss il quale non amava particolarmente i filosofi contemporanei per le tendenze idealiste che negli ultimi tempi erano caduti in discredito sia perché incapaci di rispondere ai problemi che le scienze, in rapido sviluppo, ponevano, sia perché venivano spesso identificati con precise ideologie politiche mentre la filosofia herbartiana, che aveva riconosciuto piena autonomia alle scienze particolari e un ruolo fondamentale alla matematica, e quindi diventava un importante termine di confronto negli ambienti filosofici più sensibili alle problematiche scientifiche.

È comunque certo che l'adesione di Riemann alla filosofia herbartiana non è semplicemente generica e tantomeno passiva, ma consapevole e critica. Lo stesso Riemann afferma:

[31] Su Herbart si legga [PETT], 1988

[32] Sull'influenza di Herbart sul pensiero di Riemann, vedi Erhard Scholz, [SCHO], 1982, pp.413–440. Più in generale, sui rapporti tra geometria dello spazio e filosofia, vedi Roberto Toretti, [TOR], 1984 (seconda edizione)

[33] Su Lotze, [CRA], 1994

> *[...] mi sono potuto attenere quasi completamente alle prime ricerche di Herbart, i cui risultati sono contenuti nelle* Tesi *di promozione e abilitazione; mi sono invece dovuto allontanare dagli ultimi sviluppi della sua speculazione in un punto essenziale, là dove viene postulata una differenza tra la sua filosofia della natura e quei princìpi della psicologia che riguardano la sua connessione con la filosofia della natura.*[34]

Quindi Riemann abbraccia la filosofia herbartiana ma non in toto e scarta ciò che gli sembra obsoleto o insostenibile e la filosofia naturale per rielaborare il tutto in modo originale, cercando di dare corpo ad un nuovo «sistema filosofico» che consenta di rispondere adeguatamente ai problemi posti dalle scienze, e di dare luogo ad un rapporto fruttuoso per entrambe.[35]

Herbart difende anche polemicamente una posizione antidealista: egli afferma che la filosofia non è altro che *elaborazione di concetti* ed il suo scopo, quindi, consiste nel "*trasformare in concetti e perciò epurare e liberare dalle contraddizioni i dati dell'esperienza interna ed esterna*".[36]

Nei suoi appunti databili intorno al periodo di preparazione della *Habilitationsvortrag* Riemann scrive:

- *Filosofia = ricerca dei concetti* [...]
- *Speculazione [Spekulation] = tensione verso la soluzione dei problemi*
- *Dimostrazione di una necessaria connessione [Zusammenhang] tra concetti [...]*
- *Filosofia come scienza*

Quest'ultimo appunto, che riprende il titolo del capitolo conclusivo dell'*Über philosophisches Studium*, in cui Herbart analizza il rapporto tra filosofia e scienza,

[34] Bernhard Riemann, [RIE2012], 2012.
[35] Erhard Scholz, [SCHO] pp.413–440, 1982
[36] Nicola Abbagnano, [ABA], 1995.

è il punto focale in cui l'autore pone il ruolo fondamentale della matematica nella filosofia, idea che era in comune con le convinzioni di Gauss, il quale riteneva anch'esso che la matematica fosse una parte fondamentale nello studio della filosofia. In esso Herbart così si esprime:

> *Trattata filosoficamente, [la matematica] diventa una parte della filosofia, quella che, per le sue proprie necessità, dovrebbe creare una teoria delle grandezze, sempre che non ne esiste già una.*[37]

Facendo sue queste parole Riemann, in coincidenza con l'idea di Gauss espressa nella *Jubiläumsschrift*, di una "teoria generale astratta delle grandezze, indipendente dalla spazialità"[38], costruisce la sua teoria nella sua *Habilitationvortrag*.

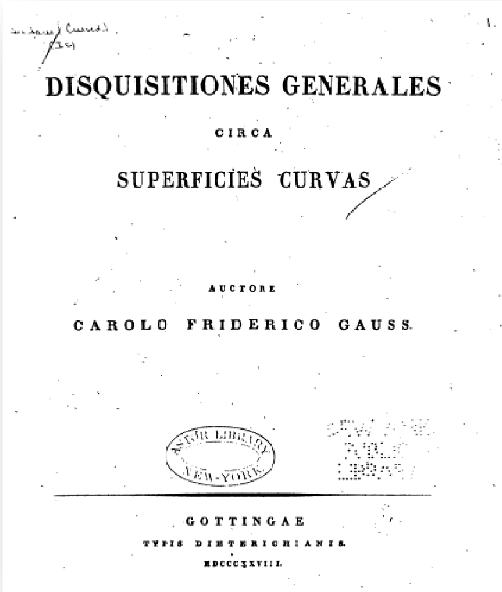
Che gli studi e gli scritti di Riemann siano orientati in una direzione ben precisa emerge anche da una ricerca condotta da Umberto Bottazzini e Rossana Tazzioli[39]: sembrerebbe che nella memoria di Riemann del 1853, *Neue mathematische Principien der Naturphilosophie*[40]. In questo scritto sembra che Riemann tenti di trovare una spiegazione matematica che tenda a collegare in modo uniforme, diversi fenomeni fisici, quali la gravitazione, l'elettricità il magnetismo e la luce. Tale tendenza sembra affiorare anche negli scritti più celebri che sono l'*Inauguraldissertation* (1851) e la già citata *Habilitationsvortrag*.

Come abbiamo già accennato, le principali fonti di ispirazione che hanno condotto Riemann ad elaborare concetti geometrici tanto originali ed innovativi si trovano, come già detto, senza dubbio negli scritti di Gauss, che a sua volta si era

[37] Johann Friedrich Herbart, [HER], 1807. Trad. da Claudio Bartocci, [BAR], 2016.
[38] C. F. Gauss, [GAU1867], 1867. Trad. in [BAR], 2016.
[39] Umberto Bottazzini e Rossana Tazzioli, [BotTaz], 1, pp.3-38, 1995
[40] Bernhard Riemann, [RIE1853], 1853

riferito ad Eulero ed ai matematici francesi del settecento.[41] La prima memoria che presenta la trattazione della teoria delle superfici è la *Disquisitiones circa superficies curvas (1828)*. In essa Gauss esordisce:

> *Sebbene i geometri si siano molto occupati di ricerche generali sulle superfici curve e i loro risultati coprano una parte significativa del campo della geometria superiore, questo argomento è ancora così lontano dall'essere esaurito che si può dire che sino ad ora è stata coltivata soltanto una piccola parte di un campo estremamente fecondo.*[42]


DISQUISITIONES GENERALES
CIRCA
SUPERFICIES CURVAS
AUCTORE
CAROLO FRIDERICO GAUSS.
GOTTINGAE
TYPIS DIETERICHIANIS.
MDCCCXXVIII.

Le *Disquisitiones* sono il punto di partenza della disciplina che prenderà il nome di geometria differenziale. Prima della sua formulazione, si era convinti che la geometria atta a descrivere l'universo fosse quella euclidea tridimensionale. Con il suo scritto Gauss introduce un nuovo modo di vedere la realtà, prescindendo dalle chiusure mentali a cui può portare una visione del mondo tangibile rappresentabile esclusivamente dalla geometria basata sui cinque postulati di Euclide. Ciò non significa che prima di Gauss non si fossero elaborate geometrie non euclidee, solo che Gauss fu il primo a pensare che la geometria più idonea a rappresentare il mondo naturale fosse una geometria non euclidea.

Nel suo programma di ricerca Gauss, come punto fondamentale, propone di considerare una superficie non come la frontiera di un solido, bensì come un solido flessibile ed inestensibile avente una dimensione nulla. La conseguenza di

[41] Rossana Tazzioli, [TAZ2000], 2000
[42] Carl Friedrich Gauss, [GAU], 1828

ciò è che Gauss ha dovuto strutturare una "impalcatura" di supporti teorici e ha dovuto immaginare di trovarsi sulla superficie come se essa non appartenesse ad un sistema tridimensionale ma solamente bidimensionale. Questo tipo di trattazione viene detto intrinseco, come il sistema di riferimento di coordinate, che devono essere appartenenti alla superficie. Il sistema di riferimento cartesiano intrinseco era completato anche da una unità di misura, ovvero Gauss determinava sulla superficie la "prima forma fondamentale" o "elemento lineare" che esprime la distanza tra due punti della superficie infinitamente vicini. Gauss riuscì a provare che l'identificazione di tale distanza è sufficiente a determinare tutte le caratteristiche essenziali della superficie, in particolare la curvatura in un punto di essa (la "gaussiana") e le geodetiche. L'idea chiave di Gauss è quella di riuscire a dedurre le caratteristiche globali della superficie a partire dalla forma fondamentale che esprime ciò che accade nelle sue parti infinitesime.

Il concetto di curvatura, nella geometria di Gauss, assume un ruolo determinante. Nelle sue *Disquisitiones* Gauss arriva a formulare il *theorema egregium*[43] che fornisce un metodo di classificazione delle superfici. Ma l'effetto più evidente è quello di portare Gauss a riflettere sulle proprietà delle figure che si sviluppano su altri solidi, in particolare sulla superficie terrestre, per riuscire a capire se la geometria che rappresenta la natura sia quella euclidea.

Queste idee fondanti saranno riprese da Riemann nella già citata dissertazione del 10 giugno 1854, la *Habilitationvortrag*, e le conseguenze hanno caratterizzato tutta la geometria che è stata rielaborata in seguito.

Nel 1854, inoltre, i tempi erano maturi per concepire una geometria estranea a quella euclidea. Per più di duemila anni l'uomo aveva dato per

[43] Il teorema si può enunciare come segue: *se una superficie curva è sviluppata sopra una qualunque altra superficie la misura di curvatura in ogni suo punto rimane invariata*. Eugenio Beltrami, qualche decennio dopo, dedusse che conseguenza di questo teorema è che una superficie curva può deformarsi per semplice flessione in modo da sovrapporsi su un'altra solo se in ogni punto le due superfici hanno la stessa curvatura.

assodato che la natura fosse descrivibile esclusivamente dalla geometria che Euclide aveva scritto nei suoi tredici libri. Già negli anni '30 del 1800 Nicolaj Ivanovič Lobačevskij e János Bolyai[44] avevano elaborato la geometria iperbolica che è possibile costruire scardinando l'idea che i concetti primitivi della geometria contengono di per sé la verità, e ribadendo il fatto che, anche in geometria, questa vada ricercata con l'esperienza. La geometria iperbolica la si può ottenere dalla base dei primi quattro postulati di Euclide e sostituendo il quinto con il seguente: se r è una retta e P un punto non appartenente ad essa, allora esistono più rette parallele ad r e passanti per P.

In realtà diversi teoremi della geometria iperbolica erano stati precedentemente dedotti da Gauss, ma mai pubblicati. Quando l'amico Farkas Bolyai nel 1832 inviò a Gauss il suo *Tentamen* per la sua approvazione, questi rispose:

> *se comincio col dire che non posso lodare questo lavoro, tu certamente per un istante resterai meravigliato. Ma non posso fare altro: lodarlo sarebbe lodare me stesso; infatti tutto il contenuto dell'Opera, la via spianata da tuo figlio, i risultati ai quali egli fu condotto coincidono quasi interamente con le mie meditazioni, che hanno occupato in parte la mia mente da trenta a trentacinque anni a questa parte. [...] Avevo l'idea di scrivere, col tempo, tutto ciò, perché esso non perisse con me. È adunque per me una gradevole sorpresa vedere che questa fatica può ora essermi risparmiata, e sono estremamente contento che sia proprio il*

[44] Su Lobačevskij e János e Farkas Bolyai: [BOY], 1990

> *figlio del mio vecchio amico, che mi abbia preceduto in modo così notevole*[45]

Il *Tentamen* è l'opera di Farkas Bolyai, pubblicata nel 1832, la cui appendice redatta a cura del figlio János, conteneva una trattazione della "geometria assoluta", geometria basata esclusivamente sui primi quattro postulati euclidei. Tale appendice fu annunciata da János a Farkas già nel 1823[46], ma gli ci vollero nove anni per renderla pronta per la pubblicazione.

Tutte le considerazioni sulle geometrie non euclidee, tuttavia, si riferiscono a situazioni tridimensionali oppure a figure che a due dimensioni si sviluppano nella terza. I risultati di Gauss, Bolyai e Lobačevskij portarono a dedurre che non fosse possibile, una volta determinato un sistema di riferimento su una superficie bidimensionale a curvatura costante, capire se tale superficie si sviluppa nella terza dimensione. Inoltre le uniche superfici a curvatura costante sono il piano euclideo (a curvatura nulla), la sfera (a curvatura positiva) e la pseudosfera (a curvatura negativa).

A proposito dell'importanza che assunse il tema delle geometrie non euclidee, e la diffidenza con cui furono accettate da diversi matematici del tempo, scrivendo sulla geometria iperbolica al suo amico Houël in una lettera alla fine del 1869, Beltrami così si esprime:

> *[...] Je crois que votre difficulté ne vient pas du sujet même dont il s'agit, mais des principes qui sont supposés par moi relativement à la doctrine de Gauss sur les surfaces courbes. Il me semble que cette doctrine n'a pas trouvé généralement sa complète « Würdigung», à tel point que personne n'a*

[45] Lettera di Gauss a Farkas Bolyai 1832 in [TAZ2000].
[46] Farkas [Wolfgang] Bolyai, [BOLF], 1832 e János Bolyai, [BOLJ], 1832

> *encore remarqué ce fait capital, savoir qu'elle est entièrement indépendante du postulat d'Euclide.*[47]

Nella sua *Habilitationvortrag* Riemann per primo definisce il concetto generale di grandezze pluriestese, ovvero grandezze *n*-dimensionali, la cui curvatura può variare da punto a punto oppure essere ovunque costante, e su cui si possono sviluppare geometrie non euclidee, idea che i suoi predecessori non avevano mai approfondito. Uno degli scopi di Riemann era quello di dimostrare che gli assiomi di Euclide fossero verità empiriche e non di per sé evidenti. Questa idea contrastava quella in voga dettata da Immanuel Kant che prevede, nella sua *Critica alla ragion pura*, che tutti i princìpi della geometria siano certezze oggettive.

Inoltre, anche se Riemann non ne fa mai riferimento, da ciò che scrive sembrerebbe che la diretta conseguenza delle sue conclusioni sia la costruzione di modelli delle geometrie non euclidee, come ad esempio la geometria ellittica (detta anche *geometria di Riemann*) che ha luogo su una superficie sferica identificando i punti diametralmente opposti.

[47] Lettera del 19 dicembre 1869 di Beltrami a Houël in [BGT], 1998

3. Una introduzione di Schläfli

Quasi contemporaneamente alla dissertazione di Riemann, un ruolo importante ha svolto nella ricerca della geometria *n*-dimensionale un matematico del XIX secolo noto prevalentemente per aver classificato i politopi quadridimensionali in base a dei coefficienti che prendono il suo nome, Ludwig Schläfli. In realtà in Schläfli si può riconoscere uno dei primi studiosi della geometria *n*-dimensionale: nel suo "*Theorie der vielfachen Kontinuität*" scritto tra il 1850 e il 1852 e tradotto in parte in lingua inglese da Cayley nel 1858, studia in modo sistematico e approfondito tale geometria dal punto di vista analitico. In realtà il suo lavoro viene ignorato quasi del tutto dai suoi contemporanei ed è pubblicato integralmente postumo solo nel 1901. In esso viene nominata per la prima volta la figura geometrica a *n* dimensioni che è il corrispondente poligono nello spazio bidimensionale e il poliedro nello spazio tridimensionale ovvero il politopo (*Polyschemon*). Esso viene definito da Schläfli come *la regione finita e convessa di uno spazio vettoriale n-dimensionale delimitata da un numero finito di iperpiani*.

In appendice presentiamo una traduzione parziale del testo di Schläfli tradotto in inglese su impulso di Cayley[48] nel 1858. Qui ci limitiamo a presentare alcune linee direttive del pensiero di Schläfli, ricordando comunque che in parte tali idee vennero realmente rese note soltanto nel 1901, sei anni dopo la sua morte.

Ludwig Schläfli (1814-1895) era uno studioso svizzero che ha vissuto quasi tutta la sua vita nel cantone di Berna e, per undici anni (dal 1836 al 1847) è stato

[48] I rapporti tra Cayley e Schläfli costituiscono un importante capitolo a parte. Sviluppatisi soprattutto attorno alla problematica geometrica delle ventisette rette di una superficie cubica generale, si svilupparono anche sulla tematica degli iperspazi. Una interessante documentazione si ha anche dalla lettura della loro abbondante corrispondenza, Johann Heinrich Graf, [GRF1905], 2010.

insegnante di teologia della scuola superiore di Thun, un piccolo centro a sud-est di Berna. Occupava il suo tempo libero studiando matematica e botanica, e si specializzò nello studio di geometria superiore recandosi una volta a settimana all'Università di Berna per approfondire le sue conoscenze[49].

Nel 1843 conobbe per caso uno dei più grandi matematici contemporanei svizzeri, Jakob Steiner; in quel tempo Steiner era docente all'Università di Berlino e Schläfli meditava da tempo di incontrarlo per entrare in contatto con i matematici della città tedesca. Prima che potesse recarsi a Berlino fu proprio Steiner ad andare a Berna e incontrando Schläfli rimase impressionato dalle sue conoscenze di geometria e dalla sua perfetta conoscenza della lingua francese e di quella italiana. Fu così che Steiner indicò ai suoi colleghi berlinesi Jacobi, Dirichlet e Borchardt il professore di uno sperduto paesino nei pressi di Berna, Ludwig Schläfli, quale interprete per un viaggio che avrebbero affrontato in Italia e di cui egli beneficiò sotto ogni punto di vista, poiché durante i sei mesi trascorsi con i docenti tedeschi tradusse diversi loro lavori in italiano e instaurò rapporti di collaborazione con l'università di Berlino.[50]

Nel 1848 Schläfli ottenne il posto all'Università di Berna e vi rimase sino al 1891 continuando il suo rapporto epistolare con Steiner e dedicandosi non solo alla matematica, ma anche allo studio di lingue orientali.

Oggi Schläfli, insieme a Bernhard Riemann e Arthur Cayley è considerato un progenitore della geometria iperdimensionale. I suoi studi percorrono soprattutto problematiche relative all'analisi con importanti ricadute nella geometria algebrica (le 27 rette di una superficie cubica).

[49] Su Schläfli è interessante lo studio recente, Ruth Kellerhals, [KEL], 2010; le opere di Schläfli sono pubblicate in Ludwig Schläfli, [SCH1950] 1950 – 1956.

[50] [CAM], 1896

Ludwig ebbe significativi rapporti con i matematici italiani, con i quali era in corrispondenza[51] e si incontrava periodicamente durante le vacanze e i suoi frequenti viaggi in Italia.

Schläfli, partendo dallo studio dell'integrale multiplo $\int^n dxdy...dz$, i cui estremi sono $p_1 = a_1x + b_1y + ... + h_1z > 0$, $p_2 > 0$, ... $p_n > 0$, e $x^2 + y^2 + ... + z^2 < 1$, si dedica alla ricerca del significato che può avere nello spazio geometrico tale integrale, giungendo ad esplorare lo spazio a generiche dimensioni. Incontra, inoltre, per la prima volta l'esigenza di coniare nuovi termini (quale ad esempio *polyschemon* che rappresenta la figura geometriche ad *n* dimensioni nello spazio ad n dimensioni – quello che noi oggi in italiano chiamiamo politopo –, o *perischemon* che rappresenta una figura geometrica ad $n-1$ dimensioni che funge da "faccia" ad un *polyschemon* – ovvero le celle chiamate celle –).

In *Theorie der vielfachen Kontinuität*, inoltre, nello studio della geometria lineare di *n*-dimensionali, Schläfli definisce anche la sfera *n*-dimensionale e ne calcola il volume. Inoltre riesce a definire anche quanti sono i politopi regolari nello spazio a quattro e a cinque dimensioni.

Nella prefazione della *Theorie*, l'autore si pronuncia nel seguente modo:

> *Il trattato che ho l'onore di presentare qui, all'Accademia Imperiale della Scienza, è un tentativo di creare e sviluppare un nuovo ramo dell'analisi che vorrei definire una geometria a n dimensioni, comprendente le geometrie del piano e dello spazio come casi particolari per* $n = 2, 3$. *Chiamo questa teoria della continuità multipla, nello stesso modo in cui, generalmente, la geometria dello spazio viene definita della*

[51] Johann Heinrich Graf, [GRF1915]. Queste corrispondenze riguardano Domenico Chelini, Eugenio Beltrami, Felice Casorati e Luigi Cremona. Sono incentrate soprattutto su problemi riguardanti l'analisi e la geometria algebrica, e non la teoria dei politopi.

> *tripla continuità. Come in quella teoria il gruppo di valori delle sue coordinate determina un punto, così in questa un gruppo di valori dati da n variabili* $x, y, \ldots$ *determinerà una soluzione. Uso questa espressione, perché così viene chiamato ogni 'gruppo' sufficiente di valori nel caso di una o più equazioni a molte variabili; l'unica cosa inusuale di questa definizione è che io la mantengo anche in assenza di una qualsiasi equazione che leghi le variabili. In tal caso chiamo il totale (insieme) delle soluzioni una totalità di n-varietà; mentre nel caso siano date* $1, 2, 3, \ldots$ *equazioni, il totale delle loro soluzioni è chiamato rispettivamente (un) Continuo di* $(n-1)$*-varietà,* $(n-2)$*-varietà,* $(n-3)$*-varietà. Dalla notazione delle soluzioni di una totalità se ne deduce l'indipendenza delle loro (delle variabili) posizioni relative nel sistema di variabili usato, in quanto nuove variabili potrebbero prendere il loro posto tramite una trasformazione. Questa indipendenza viene espressa nell'inalterabilità di ciò, che io chiamo la distanza tra due soluzioni date* $(x, y, \ldots)$, $(x', y', \ldots)$ *e definita nel caso più semplice da:* $\sqrt{(x'-x)^2+(y'-y)^2+\ldots}$ *mentre allo stesso modo chiamo un sistema di variabili ortogonali [...]*[52]

Ancora una volta, dopo Cayley, un altro geometra pensa ai punti dello spazio *n*-dimensionale come a soluzioni di equazioni lineari, e ha la brillante mossa di considerare un sistema *senza alcuna equazione*, così da ottenere, come diremmo noi oggi, tutti i possibili punti di $\mathbb{R}^n$. Egli propose questo concetto negli articoli che

[52] Il testo originale in lingua tedesca è in Appendice II

pubblicò nel decennio 1850-'60 e presto diede per assodato il suo punto di vista analitico: anche per Schläfli, come per Cayley (finché nel 1870 non cambierà idea), i punti sono vettori ordinati di *n* valori numerici che rappresentano le coordinate numeriche nello spazio *n*-dimensionale.

Complessivamente la lettura del lavoro di Schläfli è sorprendente. In oltre duecento pagine, senza l'ausilio di alcuna figura, senza quindi alcun ricorso diretto all'intuizione spaziale, il matematico svizzero ci presenta una teoria del tutto nuova, che appare nascere completamente dal nulla. Come dice Coxeter[53]:

> *Pratically all ideas of this chapter* [si tratta del capitolo sui politopi] *(...) are due to Schläfli, who discovered them before 1853 – a time when Cayley, Grassmann and Möbius were the only other people who had ever conceived the possibility of geometry in more of three dimension.*

Se si pensa che un tale apprezzamento è contenuto in un testo classico scritto più di cento anni dopo, non si può fare a meno di ammirare la straordinaria visione del matematico svizzero.

Seguiremo l'esposizione di Schläfli utilizzando sia il lavoro postumo del 1853, sia il riassunto del 1858. Il lavoro del 1858 parte in modo del tutto analitico da problemi relativi al calcolo degli integrali multipli, pensato come calcolo di volumi di ipersfere nello spazio multidimensionale. Uno dei punti chiave dello studio di Schläfli consiste nella sua estensione al caso quadridimensionale della formula di Eulero circa il numero di vertici (V), spigoli (S), facce (F) di un poliedro convesso, che come è noto è $V-S+F-1=1$. La formula ricavata da Schläfli nel caso quadridimensionale è $V-S+F-I+1=1$ (dove I è il numero delle celle[54] del politopo). Torneremo più avanti su questa formula nel quadro della sua riscoperta

[53] Donald Coxeter, [COX], 1948

[54] Schläfli chiama *perischemon* quella che oggi noi chiamiamo cella.

da parte di Stringham, ma qui forse possiamo notare che si tratta della prima formula generale relativa agli spazi a quattro dimensioni. Nel suo sforzo di classificazione rigorosa dei politopi egli introdusse i suoi famosi simboli $\{p, q, r, ...\}$, nel caso di politopi regolari convessi, con una simbologia ricorsiva. Così $\{p\}$ rappresenta un poligono con p lati; $\{p, q\}$ un poliedro con q facce che a loro volta sono poligoni con p lati, convergenti su di un vertice. Il cubo sarà quindi rappresentato dal simbolo $\{4, 3\}$. Per politopi quadridimensionali $\{p, q, r\}$ rappresenta un politopo le cui celle sono poliedri di tipo $\{p, q\}$ che convergono nel numero di r in ciascun vertice; così un ipercubo sarà rappresentato dal simbolo $\{4, 3, 3\}$. I simboli di Schläfli, tra l'altro riscoperti da Hoppe nel 1882, entrarono realmente nell'uso comune soltanto negli anni '20 del XX secolo ad opera soprattutto di Coxeter.

Particolarmente significativo è il modo con cui Schläfli determina i possibili politopi. Ci limitiamo ad una breve descrizione, rinviando, per quanto riguarda un approfondimento tecnico, al citato testo di Coxeter.

> *Come è noto, la condizione perché possa esistere un poliedro regolare* $\{p, q\}$ *è che* $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}>\frac{1}{2}$*; da cui i cinque poliedri regolari* $\{3, 3\}$, $\{3, 4\}$, $\{3, 5\}$, $\{4, 3\}$, $\{5, 3\}$. *La analoga disuguaglianza per i politopi a quattro dimensioni* $\{p, q, r\}$ *è* $\sin\frac{\pi}{p}+\sin\frac{\pi}{r}>\cos\frac{\pi}{q}$. *Deve essere inoltre* $\{p, q\}$, $\{q, r\}$ *simboli ammissibili per poliedri regolari. Ne consegue che vi sono esattamente sei possibili politopi nello spazio quadridimensionale:* $\{3, 3, 3\}$, $\{3, 3, 4\}$, $\{3, 3, 5\}$, $\{3, 4, 3\}$, $\{4, 3, 3\}$, $\{5, 3, 3\}$.

Come si vede una descrizione puramente aritmetica e combinatoria. Naturalmente occorre ancora mostrare che tali politopi esistono effettivamente e calcolarne il numero di vertici, spigoli, facce e celle, cosa che Schläfli fa, costruendoli cella per cella in un modo assai faticoso. Noi rinvieremo la descrizione dei sei politopi al capitolo sull'opera di Stringham, che oltre a determinarli per via analitica, si sforzerà anche di darne un'immagine grafica.

Applicando le analoghe regole per spazi a dimensione superiore Schläfli ottiene il risultato, totalmente non intuitivo, che nello spazio a cinque dimensioni, ci sono solo tre politopi regolari: $\{3, 3, 3, 3\}$, $\{3, 3, 3, 4\}$, $\{4, 3, 3, 3\}$, così come anche per tutte le dimensioni superiori.

Schläfli aggiunge a tutto ciò, anche una straordinaria classificazione dei politopi stellati per i quali inserisce un ulteriore simbolo $5/2$ relativo al pentagramma, un simbolo che, allargato e generalizzato, avrà uno straordinario successo. Anche la tematica dei politopi stellati dovrà attendere molti anni prima di essere riscoperta più volte e trovare una definitiva sistemazione nel secolo successivo. Torneremo solo brevemente sull'argomento.

Come già detto, in appendice riportiamo una traduzione di ampi stralci del lavoro del 1858, oggi purtroppo poco studiato, anche se spesso citato.

Noi abbiamo seguito fondamentalmente questo lavoro, l'unico apparso prima del 1901. Una descrizione abbastanza dettagliata del lavoro fondamentale apparso postumo[55] si può trovare nel classico volume di Coxeter[56].

Inutile ripetere che il fondamentale contributo non ebbe alcuna eco immediata.

---

[55] Ludwig Schläfli, [SCH1901], 1901, pp. 1–237.
[56] Donald Coxeter, [COX], 1973 (2ª edizione).

4. La visualizzazione degli iperspazi

Mentre la geometria iperspaziale andava conquistando un posto ormai stabile come strumento di ricerca avanzata in tutti i campi (dalla topologia alla geometria algebrica all'analisi come nell'ancora non ben definita geometria dei politopi) si andava manifestando un'altra esigenza: quella di visualizzare gli oggetti geometrici di cui si parlava. Inoltre la questione della possibile immersione del nostro spazio tridimensionale in uno quadridimensionale (sempre esemplificata attraverso il passaggio dal bidimensionale al tridimensionale) si legava a una questione epistemologica fondamentale: quali sono i limiti della conoscenza empirica diretta del mondo in cui siamo immersi? L'esame di esseri razionali che, trovandosi in un mondo ipotetico diverso dal nostro, sarebbero indotti a elaborare una geometria diversa da quella nostra (o relativamente alla curvatura dello spazio o relativamente al numero delle sue dimensioni) diveniva quindi imprescindibile. Questo poneva delle domande sul piano della filosofia della scienza sempre più stringenti. Una volta che era stato appurato, da un percorso matematico vario, ma alla fine convergente, la possibilità di elaborare teorie matematiche coerenti diverse anche in modo radicale da quella euclidea, come poter rispondere alla domanda: ma quale è la matematica del nostro mondo. È noto, e noi non affronteremo questa tematica, che le più accreditate tendenze della filosofia della matematica, partite da posizioni empiriste che vedevano nell'esperimento l'unico strumento per scegliere tra teorie difformi, ma egualmente razionali, arriveranno a posizioni che in Poincaré negheranno del tutto tale possibile scelta.

In ogni caso l'esito del dibattito che ne conseguì fu la più chiara separazione tra la matematica, destinata, per quanto riguarda la geometria, ad esaminare solo la coerenza di una costruzione razionale (assiomatica), e altre questioni scientifiche come quelle relative alla fisica. Noi non esamineremo queste questioni eminentemente filosofiche, ma ci limiteremo ad esaminare come questa esigenza più propriamente scientifica si intrecciasse con quella di esporre alcuni dei risultati ad un pubblico più vasto, la cui curiosità andava crescendo in modo peraltro ovvio.

Tale curiosità aveva naturalmente molti aspetti non matematici, riguardanti sia l'effettiva esistenza di tali spazi sia aspetti legati ad una crescente diffusione (anche in ambienti scientifici) di problematiche relative allo spiritismo e ad ogni sorta di tendenze all'occultismo.

Non tenteremo qui di tracciare la preistoria degli spazi a più dimensioni, preistoria spesso legata alla interpretazione geometrica delle soluzioni di equazioni di grado maggiore di tre, limitandoci a rinviare alla letteratura[57].

Come abbiamo già detto i primi tentativi di comprendere la quarta dimensione attraverso la fiction degli esseri bidimensionali risalgono a Gauss (anche se reso noto solo nel 1856, e realmente popolarizzato da Sylvester nel 1869). Ancora successivamente tale immagine veniva ripreso, spesso in modo del tutto indipendente: qui ci limitiamo a qualche accenno[58].

Forse la più interessante tra queste immagini è quella data dallo psicologo tedesco Gustav Fechner (1801 – 1887), che nel 1846 pubblicò sotto lo pseudonimo Dr. Mises un lavoro ironico e in parte satirico[59], in cui un capitolo (*Der Raum hat Vier Dimensionen*) è, appunto, dedicato agli iperspazi. In questo racconto l'essere bidimensionale è rappresentato da un uomo–ombra, proiezione su uno schermo attraverso una camera oscura:

[57] Vedi per esempio Boris A. Rosenfeld, [ROS], 1988.

[58] Per queste brevi note abbiamo attinto ampiamente al testo di Linda Dalrymple Henderson, [HEN], 1983, cui rinviamo per ulteriori informazioni e per tutto quanto compete agli aspetti legati all'utilizzazione del tema nelle arti figurative.

[59] Dr Mises, [DrM], 1846.

> *as it comes into areas of light, it will itself be altered thereby and perhaps at the end of the way it will appear pale and wrinkled, whereas at the beginning it was smooth and round[60].*

Una interessante notazione, da psicologo, è quella per cui l'essere bidimensionale percepirebbe il moto lungo una perpendicolare al suo piano come tempo. Significativo è poi il fatto che Fechner abbia lavorato presso l'Università di Lipsia cui faranno più tardi capo sia Zöllner che, soprattutto, Felix Klein.

Sebbene ci si possa interrogare su quanto l'esposizione della sua dissertazione per l'abilitazione avesse uno scopo divulgativo, Riemann era ben lontano dal voler fare della fantascienza, non si può negare che da quel momento in avanti fu fornito un input che accese una lampadina nelle teste di tanti matematici che si ponevano il dubbio sulla connessione tra i modelli matematici e il loro rapporto con la realtà. La geometria differenziale multidimensionale, così come tutte le geometrie non euclidee, cominciarono a diventare popolari nel mondo matematico e scientifico e ci si chiese fino a che punto la matematica potesse essere la chiave per la descrizione dei fenomeni fisici.

I matematici e gli scienziati dell'epoca diedero un notevole impulso alla divulgazione delle geometrie non euclidee della geometria di Riemann all'interno del proprio mondo accademico attraverso conferenze, articoli in riviste scientifiche o libri e sebbene oggi, dopo più di un secolo, questo ci può sorprendere, a poco a poco cominciarono a farle conoscere al pubblico in generale.

[60] La citazione è tratta da Shelly L. Ackermann, [ACK], 2008, p. 58. Su questo, ed altri aspetti dei primi tentativi di rappresentare il mondo quadridimensionale vedi anche le note di Ian Stewart in [STE], 2002.

Senza voler risalire agli accenni di Gauss su tali argomenti, le riflessioni sull’argomento, almeno quelle pubbliche, appaiono per la prima volta il 24 aprile 1869, in una lettera di Beltrami a Helmholtz. Il matematico cremonese scrive:

> L’ensemble de mes déductions repose sur la représentation des surfaces par la formule de Gauss $ds^2 = E\,du^2 + 2\,F\,du\,dv + G\,dv^2$. Or dans cette méthode, les rapports de la surface et de l’espace environnant échappent entièrement: la surface est considérée en elle-même, telle qu’elle le serait par un être qui n’eut pas le sens de la troisième dimension[61].

Hermann von Helmholtz (1821-1894), docente di fisiologia e anatomia, negli anni sessanta (dell’ottocento) si occupa del problema dei fondamenti della geometria: una problematica che interseca diversi suoi interessi: fisica, fisiologia dell'occhio, matematica, filosofia.

Helmholtz era quindi un medico, ma era molto interessato all’ottica in quanto nel 1867 ha scritto un lungo e dettagliato trattato sulla fisiologia dell’occhio e sulla percezione visiva. Nel suo trattato, il medico vuole indagare sul modo in cui l'azione fisica dei corpi esterni, la struttura fisiologica dei nostri organi di senso e la rielaborazione psicologica delle sensazioni concorrono alla percezione e rappresentazione degli oggetti esterni. Egli infatti cerca di spiegare come l'attività psichica che ci porta a concludere che un determinato oggetto, con una determinata forma, si trova in una determinata posizione al di fuori di noi è, quasi sempre, un'attività di cui non siamo coscienti. La maggior parte delle nozioni che riguardano lo spazio deve essere considerata il risultato dell'esperienza e dell'abitudine. La rappresentazione della forma dei corpi e della loro localizzazione nello spazio si produce per mezzo del confronto delle immagini ricevute dai due

[61] Lettera di Beltrami a Helmholtz del 24 aprile 1869, in [BGT], p. 204.

occhi: attraverso spostamenti sia dei corpi sia dell'osservatore, ci si rende conto che qualcosa rimane inalterato.

> *Se non esistessero un gran numero di oggetti simili, la nostra facoltà di formare delle nozioni di specie non ci sarebbe di alcuna utilità; se non ci fossero corpi rigidi, le nostre facoltà geometriche resterebbero senza sviluppo e senza uso allo stesso modo in cui l'occhio non ci servirebbe a niente in un mondo senza luce*[62]

Nel 1867 Helmholtz, per poter spiegare come viene percepito lo spazio dai sensi umani, comincia la sua ricerca sui fondamenti della geometria, e mette in rilievo come la percezione dello spazio reale può essere del tipo empirista, o innatista. Proprio quell’anno venne pubblicata la citata memoria di Riemann “Sulle ipotesi che stanno a fondamento della geometria”. In essa l’allievo di Gauss forniva un nuovo modo di intendere la geometria.

Nella memoria riemanniana era trattato l’argomento per come Helmholtz aveva intenzione i fare, così decise di pubblicare delle proprie osservazioni in merito e prese corpo una conferenza dal titolo "Sui fatti che stanno a fondamento della geometria" che presentò nel 1868.

La premessa di Helmholtz è che bisogna distinguere, in primo luogo, le proposizioni della geometria che hanno un significato fattuale da quelle che sono semplici definizioni legate al linguaggio usato per esprimersi. Quindi, trovare l'origine delle proposizioni che riguardano i fatti.

La geometria, così come è esposta nei manuali, osserva Helmholtz, presuppone tutta una serie di fatti che vengono ritenuti ovvi, sui quali non si è sufficientemente indagato, mentre proprio la loro ovvietà esprime caratteristiche ben precise del mondo reale esterno a noi. Riemann ha correttamente utilizzato lo

[62] Hermann von Helmholtz, [HEL1967], 1967

strumento dell'analisi matematica, che occupandosi di concetti puri senza fare ricorso all'intuizione geometrica, può permetterci di distinguere quelle proprietà dello spazio che sono puramente matematiche da quelle che riguardano proprietà fattuali, il cui fondamento va cercato all'esterno della matematica.

Dopo aver ripreso il concetto riemanniano di varietà multidimensionale, passa alla caratteristica fondamentale dello spazio: la possibilità di effettuare misure. Mette così subito in chiaro la differenza tra la propria posizione e quella di Riemann.

Riemann assume la formula di Pitagora, $ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2$, come ipotesi e pur sostenendo che è la più semplice tra quelle possibili ritiene che si possa cambiarla liberamente. Dal suo punto di vista, è possibile avere diverse geometrie a seconda di come si sceglie la formula per calcolare le distanze: la geometria di Euclide è solo una delle tante analiticamente possibili. Per quanto riguarda la geometria dello spazio fisico, è convinto che sia compito della fisica individuare quale tra le geometrie matematicamente possibili sia quella più idonea per la fisica.

Helmholtz introduce dall'inizio la condizione che le figure spaziali possano muoversi liberamente senza alterazione della loro forma, traduce questa idea empirico-intuitiva in assiomi sull''esistenza dei corpi rigidi e dei loro movimenti, ottiene come conclusione che la formula per calcolare le distanze non è arbitraria, l'unica compatibile con l'esistenza dei corpi rigidi è quella espressa dal teorema di Pitagora: la geometria di Euclide è, quindi, l'unica possibile in quanto l'unica compatibile con il concetto di corpo rigido.

Helmholtz conclude il proprio saggio sostenendo di essere arrivato al punto di partenza delle ricerche di Riemann.

Nella già citata lettera a Helmholtz del 24 Aprile del 1869, Beltrami scrive:

> Autant qu'il m'est donné de pénétrer dans le véritable sens de vos belles recherches, je n'y rencontre aucune conclusion que je ne puisse vérifier par les points de vue qui me sont particuliers, et que j'ai exposés, en partie, dans les deux publications intitulées: *Saggio di interpretazione della geometria non euclidea* et *Teoria fondamentale degli spazii di curvatura costante*, *que j'ai eu l'honneur de vous adresser, il y a quelque temps. Il n'y a qu'un point sur lequel j'ai à vous demander des lumières.*

Beltrami nei due saggi in questione ha studiato una superficie a curvatura costante negativa, la pseudosfera, che soddisfa tutte le condizioni poste da Helmholtz per l'esistenza dei corpi rigidi.

Helmholtz si rende subito conto del proprio errore e pochi giorni dopo scrive un Supplemento al suo primo saggio, nel quale precisa:

> *[...], ho sostenuto in una parte non ancora pubblicata e non completamente studiata a fondo, nella quale si è insinuato un errore, che allora non conoscevo, che una certa costante che io credevo dovesse essere reale, aveva significato anche quando la si assume immaginaria. L'affermazione colà enunciata, che lo spazio, se deve essere esteso all'infinito non può che essere piano (nel senso di Riemann), è errata. Ciò risulta specialmente dall'altamente interessante e importante ricerca di Beltrami[...]; questi ha studiato la teoria delle superfici e degli spazi con curvatura costante negativa e ha dimostrato la concordanza di questa teoria con la geometria immaginaria già enunciata in precedenza da Lobačevskij. In questa teoria lo spazio è infinitamente esteso*

> *in tutte le direzioni; figure congruenti a una data possono essere costruite in ogni parte; tra ogni coppia di punti è possibile individuare una linea di minor percorso ma la proposizione sulle parallele non vale.*[63]

In un secondo saggio Helmholtz afferma che la conclusione cui è pervenuto riguardo la geometria euclidea non è del tutto esatta: le proprie ricerche non costituiscono una discriminazione tra la geometria di Euclide e quella di Lobačevskij.

Il tentativo di Helmholtz di dimostrare matematicamente che l'unica geometria valida per lo spazio fisico è quella di Euclide non è quindi riuscito: il concetto di corpo rigido e lo strumento logico dell'analisi matematica non sono sufficienti a individuare in modo univoco la geometria euclidea. Se si aggiunge che Riemann aveva già dato un quadro sufficientemente completo della geometria e che ancora prima Gauss aveva stabilito il teorema sulla possibilità di muovere una figura senza deformarla, si può ritenere il tentativo di Helmholtz la pretesa di dare una veste matematica a quello che era ancora un pregiudizio della cultura scientifica e filosofica.

L'obiezione di Beltrami sembrerebbe far vacillare le conclusioni di Helmholtz. Ciò è vero solo per la parte matematica, l'aspetto filosofico ne esce rafforzato. Nel 1870 Helmholtz presenta una seconda conferenza sulla geometria, dal titolo: *Sull'origine e il significato degli assiomi geometrici*.[64] In essa l'autore sostiene che la geometria non è accumulo di dati empirici; tuttavia, è capace di ottenere risultati applicabili al mondo reale. Kant ne ha tratto la conclusione che possiamo avere intuizione solo di quelle esperienze che hanno un contenuto organizzato

[63] Antonio Bernardo, [BEN]

[64] H. Von Helmholtz, Sull'origine e il significato degli assiomi geometrici, in [EIN], 1967, p. 226. Si tratta della traduzione italiana di A. Loinger del testo originale tedesco, Hermann von Helmholtz, [HEL1884], 1884, v. 2. Su questo testo vedi, p. 226

secondo lo schema euclideo della geometria; Helmholtz pensa che gli assiomi dello spazio non sono una forma a priori di conoscenza ma hanno natura empirica.

Scrive Helmholtz:

> *Immaginiamo, e in ciò non v'è alcuna impossibilità logica, esseri bidimensionali, che vivono e si muovono sulla superficie di uno dei nostri corpi solidi. Supponiamo che essi non abbiano la facoltà di percepire nulla fuori di questa superficie, ma che in essa siano in grado di avere percezioni simili alle nostre. Se tali esseri costruissero una geometria, ovviamente attribuirebbero al loro spazio soltanto due dimensioni*

Tali esseri osserverebbero un punto in movimento descrive una linea, che una linea in movimento descrive una superficie e che una superficie in movimento descrive ancora una superficie. Allo stesso modo la nostra percezione dello spazio è tridimensionale perché il movimento di una superficie descrive un solido, ma il movimento di un solido non può che descrivere un altro solido. Quindi, il numero di dimensioni dello spazio ha una radice empirica, perché è una conseguenza del tipo di spazio nel quale viviamo.

Analogamente, hanno radice empirica i seguenti assiomi: per due punti passa una sola retta, per un punto esterno a una retta passa un'unica parallela. Infatti, essi non sarebbero validi per esseri bidimensionali che vivessero sulla superficie di una sfera. Occorre premettere che, per essi, la linea di minimo percorso tra due punti, cioè la retta, è un arco del cerchio massimo passante per quei due punti. Presi due poli della sfera, questi sarebbero uniti da infiniti percorsi della stessa lunghezza minima: tutti i meridiani. Non varrebbe nemmeno l'assioma delle parallele poiché tutti i circoli massimi, opportunamente prolungati si incontrano.

Infine, esseri bidimensionali viventi su una superficie a forma di uovo, osserverebbero l'impossibilità di spostare figure senza deformarle.

> *Già questi esempi mostrano che, secondo il tipo di spazio ambientale, esseri dotati di capacità intellettive affatto corrispondenti alle nostre formulerebbero assiomi geometrici diversi.*

Gli assiomi geometrici, dunque, parlano non soltanto di rapporti spaziali ma anche del comportamento meccanico dei corpi. In questo senso, gli assiomi geometrici possiedono un contenuto reale che può essere confermato o confutato dall'esperienza. Queste intuizioni dello spazio però non sono state acquisite dall'umanità tramite precise misure geometriche ma sono conseguenza di un gran numero di esperienze quotidiane avute fin dalla prima giovinezza. Si tratta di una forma di conoscenza empirica che si forma nella nostra mente attraverso accumulo e rafforzamento di successive impressioni omogenee, non di una forma trascendentale dell'intuizione, che precede ogni esperienza.

Un altro esperimento considerato da Helmholtz è quello dello specchio convesso. Un tale specchio mostra l'immagine speculare di ogni oggetto antistante, conferendole un'apparenza corporea come se esso fosse posto in una certa posizione e a una certa distanza dietro la superficie dello specchio. Per ogni figura del mondo oggettivo viene a formarsi una corrispondente figura dietro lo specchio, nel mondo speculare. Inoltre, poiché nello specchio gli strumenti di misura si deformano allo stesso modo degli oggetti da misurare, la misura di un segmento nel mondo reale è identica a quella del mondo speculare. Di conseguenza gli uomini del mondo speculare non potrebbero scoprire che i loro corpi non sono rigidi.

Secondo Helmholtz, nello spazio pseudosferico di Beltrami ci accadrebbe la stessa cosa che accade a un portatore principiante d'occhiali. Costui inizialmente si accorgerà di vedere gli oggetti ravvicinati e che si dilatano; l'illusione scompare dopo un po'.

Le conclusioni di Helmholtz sono significative:

> *Dalle leggi note delle nostre percezioni sensibili si può dedurre la serie di impressioni sensibili che ci darebbe un mondo sferico o pseudosferico se esistesse. Anche in ciò non incontriamo mai alcuna contraddizione o impossibilità.*[65]

Il saggio si Helmholtz sugli assiomi della geometria diviene un punto di riferimento e di confronto per il dibattito filosofico e culturale sulle nuove geometrie. In esso, Helmholtz, ha saputo presentare in modo semplice una tematica complessa e trattata ancora in modo esclusivamente tecnico.

Dai suoi esempi sugli esseri bidimensionali prenderà spunto E. Abbott per il suo celeberrimo libro *Flatlandia*. Nonostante ciò, relativamente alla quarta dimensione, Helmholtz nella sua opera *Lezioni popolari di temi scientifici* (del 1881), considera per l'uomo impossibile visualizzarla, e fa un paragone con il fatto che un cieco dalla nascita non può immaginare i colori.

A differenza di Helmholtz, Hinton, il cognato della già menzionata Alicia Boole Stott, fu uno di coloro che affermava di essere in grado di percepire le figure geometriche nello spazio 4D. Ma di Hinton scriveremo successivamente.

Insieme a Beltrami anche Felice Casorati dà il suo contributo alla divulgazione della geometria iperspaziale. Per l'esattezza Casorati era un ingegnere ed inizialmente ebbe l'incarico di insegnare al'Università di Pavia, in cui si era laureato seguendo i corsi di Antonio Maria Bordoni e di Francesco Brioschi, materie come topografia e idrometria. Nel 1858 con lo stesso Brioschi e con Enrico Betti compì un importante viaggio in Francia e in Germania, e da quel momento cominciò ad intessere legami epistolari e collaborazioni a distanza con i più grandi

[65] Ivi, p. 246.

matematici del tempo. Si specializzò soprattutto nel campo dello studio delle equazioni a variabili complesse e nello studio delle equazioni differenziali, mantenendo un grande interesse in diversi campi della matematica come anche la geometria algebrica.

Nel suo *Discorso per l'inaugurazione degli studi universitari a Pavia* che pronunciò il 16 novembre 1873 il matematico, che era stato chiamato a sostituire il Rettore impossibilitato a presenziare per motivi di salute, così volle presentare l'argomento della sua conferenza:

> *Vorrei che non vi fosse discara la scelta dell'argomento, il quale, sebbene sia tra i più elevati che la scienza odierna stia agitando, nondimeno è per qualche parte accessibile a tutti quelli che hanno studiato gli elementi delle matematiche, e può interessare nelle sue conclusioni tutte le persone colte. Esso versa sulla natura dello spazio, sulla natura, sull'origine degli assiomi geometrici, i quali, e specialmente l'XI di Euclide, furono, come sapete, il tormento millenario della classica geometria.*

Successivamente Casorati espone un excursus storico facendo risalire a Gauss il merito dell'esigenza dell'analisi di un sistema osservandolo da un punto di vista esterno al sistema stesso, e gli attribuisce anche quello di aver spinto il "*suo scolaro*" Riemann a trattare l'argomento nella sua tesi di ammissione alla facoltà filosofica di Göttingen, "*Sulle ipotesi che servono di fondamento alla geometria*".

Non si ferma soltanto agli ispiratori di Göttingen, piuttosto annovera anche i suoi contemporanei Helmholtz e Cayley, quest'ultimo con la sua "*Sesta memoria* *sulle quantiche*" pubblicata nelle *Transazioni filosofiche* di Londra nel 1860, e il "signor Beltrami" che con il "*Saggio d'interpretazione della geometria non euclidea*" e la "*Teoria fondamentale degli spazi di curvatura costante*", i quali hanno dato un contributo cospicuo alla ricerca dello studio della geometria iperspaziale non euclidea insieme a Felix Klein il quale in quei giorni attendeva la pubblicazione del suo "*Sopra la cosidetta geometria non euclidea*" edito dalla Clebsch e Neumann. Nomina anche Lobačevskij e i Bolyai, ma non fa cenno al lavoro di Schläfli, il lavoro del quale sembra essere a lui ignoto.

Casorati procede con la spiegazione del termine varietà e distingue il caso della varietà continua dalla varietà discreta e mostra diversi esempi di varietà doppia e varietà tripla. La descrizione delle varietà a due e tre dimensioni è molto chiara e particolareggiata e con la stessa chiarezza il professore mostra come è possibile creare il concetto fondamentale di "*distanza tra ogni due punti, assegnando una formola composta delle coordinate di due punti qualunque come espressione della distanza fra essi punti*". Tale formula se si è su un piano euclideo è la nota data dall'espressione pitagorica: $\sqrt{(x'-x)^2+(y'-y)^2}$. Ma Riemann è riuscito a mostrare come, se si considera uno spazio a varietà doppia, la geodetica tra due punti può assumere una forma diversa che si adatti allo spazio in cui ci si trova. Casorati continua:

È subito visto che la formola non può essere affatto arbitraria, se la varietà ha da presentare i principali caratteri dello spazio. Riemann ricerca qual possa essere la forma generale di tale formola; e sotto qualche restrizione corrispondente ai casi più semplici trova essere quella della radice quadrata $\sqrt{a\,dx^2 + b\,dy^2 + c\,dx\,dy + etc.}$ *di un polinomio omogeneo di secondo grado rispetto alla differenze infinitesime* $dx = x' - x,\ \ dy = y' - y, \ldots$ *delle coordinate, i cui coefficienti* $a, b, c \ldots$ *sono funzioni delle coordinate* $x, y, z \ldots$ *di uno dei due punti, cioè quantità che dipendono da queste coordinate, ossia che variano al variare di queste. Prendere per* $a, b, c \ldots$ *un determinato sistema di funzioni vale quanto determinare completamente l'indole della varietà. Nel caso di due dimensioni, e però della formola* $\sqrt{a\,dx^2 + b\,dy^2 + c\,dx\,dy}$ *, abbiamo già detto che prendendo* $a = 1,\ b = 1,\ c = 0$ *si ha la varietà affatto determinata chiamata il piano. Se invece prendessimo* $a = \sin^2 y,\ b = 1,\ c = 0$*, avremmo una sfera. Prendendo altri e altri sistemi di funzioni potremmo avere altre ed altre nuove varietà o spazii di due dimensioni e formare per ciascuno una teoria, come fece Euclide per il piano.*

In questo modo l'analisi matematica offre il mezzo per creare astrattamente quanti spazi si vogliano di 3, 4 o quante dimensioni si vogliano, ed una geometria per ogni composizione di coefficienti che si scelgono nella formula indicata da Riemann. Sarà importante, adesso, determinare le particolarità, ovvero i caratteri, gli assiomi che distinguono lo spazio a cui si appartiene. Come indica Guillaume Jules Houël nelle sue numerose corrispondenze con Beltrami e Cremona, "*la* *geometria, come la meccanica e la fisica, ha per oggetto lo studio di una grandezza concreta, l'estensione, la quale affetta i nostri sensi in modo suo proprio; e soltanto pei sensi si possono conoscere le proprietà caratteristiche di questa specie particolare di grandezze*"[66] e Casorati nel suo intervento del 1873[67] pone l'interrogativo

> *[...] quali siano le particolarità, ossia i caratteri, gli assiomi che distinguono, che determinano frammezzo a tutti i possibili, lo spazio in cui viviamo? Ed è chiaro che la risposta non può venire che dai sensi, e costituisce la parte sperimentale del concetto e della teoria del nostro spazio.*

Casorati, ispirato dalla lettura di Beltrami e Helmholtz, inserisce un esplicito riferimento ai mondi piatti virtuali:

> *Voi domanderete come mai la curvatura gaussiana sia il solo carattere che distingue, secondo Riemann, una superficie dall'altra, mentre vi hanno superficie per noi diverse, come in particolare le piane e le cilindriche, dotate della medesima curvatura? La risposta è facile e importante. In questa teoria una superficie si considera in sé stessa esclusivamente, nei suoi rapporti metrici interni, senza riferimento a veruna cosa posta fuori della medesima, si pensa come uno spazio di due dimensioni esistente di per sé, costituente da solo per così dire l'intero mondo; e non già come una superficie che esista in relazione con altre superficie e linee e punti fuori di essa e coesistenti in uno spazio p. e. di tre dimensioni*

[66] F. Casorati, Discorso per l'inaugurazione degli studi universitari a Pavia il 16 novembre 1873, in [CASO]

[67] Ivi

E prosegue immaginando la costruzione di una geometria da parte di esseri intelligenti bidimensionali:

> *Imaginiamo (con Gauss, Helmholtz, e Beltrami), poiché logicamente il possiamo, degli esseri intelligenti i quali vivano, si muovano in una superficie, abbiano, direi, un corpo di due dimensioni e percepiscano soltanto cose che si trovano nella superficie e siano insomma affatto insensibili a tutto ciò che possa esservi fuori della medesima. [...] Poiché si vengono a trovare così possibili nel pensiero.*

Casorati analizza diverse superfici a curvatura costante riprendendo più volte ciò che Gauss e Riemann avevano teorizzato sulla curvatura, e facendo degli esempi anche con un modellino di pseudosfera che Beltrami aveva confezionato con della carta. Anch'egli immagina gli esseri bidimensionali ed il loro punto di vista per poter spiegare cosa possa significare vivere in uno spazio dimensionale "ridotto" rispetto ad un altro. Essi potrebbero immaginare più spazi monodimensionali, ma uno solo bidimensionale, ossia quello in cui vivono. Analogamente noi, che viviamo in uno spazio tridimensionale possiamo immaginare ciò che accade nel "nostro" spazio tridimensionale e non ciò che accade in un altro spazio tridimensionale.

> *Lo immaginare diversi spazii di tre dimensioni sarebbe concesso a chi vivesse in quattro dimensioni.*
>
> *Per tre dimensioni risulta* $\frac{n(n-1)}{2}=3$*, cioè dire, sono tre le curvature che devono essere fissate per ciascun punto dello spazio, affinché la natura di questo resti determinata. Qui si presentano parecchi casi particolari di costanza di curvatura.*

> *Possono essere costanti una, due, o tutte e tre le curvature; ed essere uguali o diverse l'una dall'altra.*
>
> *Finora fu studiato il solo caso più semplice e più interessante delle curvature tutte e tre costanti ed eguali fra loro, il caso insomma di uno spazio identicamente costituito in ogni luogo ed in ogni direzione. E veramente questo caso fu studiato per qualunque numero di dimensioni e forma l'oggetto della citata* Teoria fondamentale degli spazi di curvatura costante *del sig. Beltrami. Ma io non considero che il nostro caso di* $n = 3$*. Il valor costante della curvatura può essere anche qui positivo, nullo o negativo. Il sig. Klein denomina ellittico lo spazio nel primo caso, parabolico nel secondo, iperbolico nel terzo. Lo spazio parabolico è quello in cui noi supponiamo di vivere, del quale Euclide ci ha tramandato la geometria, e che perciò si dice anche euclideo. Lo spazio iperbolico è quello pel quale Gauss e Lobatschewsky e Bolyai fabbricarono la geometria, ammettendo che la somma degli angoli del triangolo geodetico sia minore di due retti, geometria chiamata non euclidea; e però questo spazio si dice anche non-euclideo o gaussiano.*

I tempi erano maturi: mentre tra gli scienziati italiani e tedeschi si sviluppavano queste riflessioni tra l'epistemologico e il divulgativo, una simile evoluzione si aveva nei paesi anglosassoni. Il primo ad affrontare da questo punto di vista tali questioni sembra essere stato James Sylvester[68] che, nel 1869, nella sua qualità di presidente della sezione fisico–matematica della British Association for the Advancement of Science, pronunciava un discorso introduttivo, che veniva

[68] Di Sylvester si trova un'accurata biografia in [OCR2005], 2005

poi pubblicato, in forma abbreviata, nel primo numero della rivista *Nature*, destinata a divenire una delle più importanti riviste scientifiche mondiali[69]. In esso il matematico inglese rispondeva allo scienziato Huxley, che aveva accusato la matematica di essere una materia arida e *almost purely deductive*[70]. La risposta di Sylvester è ampia ed articolata.

Non è qui il luogo per un dettagliato esame di questo bell'articolo, che è una continua riaffermazione del ruolo essenziale giocato dell'immaginazione nella matematica ([la matematica] *affords a boundless scope for the exercise of the highest efforts of imagination and invention*). Per provare ciò Sylvester ricorre all'autorità di Gauss, la cui personalità era stata messa in luce da una biografia pubblicata nel 1856. Scrive il matematico inglese:

> *Baron Sartorius von Weltershausen [...] in his biography of Gauss [...] published shortly after his death, relates that this great man was used to say that he had laid aside several questions which he had treated analytically, and hoped to apply geometrical methods in a future state of existence, when his conceptions of space should have become amplified and extended; for as we can conceive beings (like infinitely attenuated book – worms in an infinitely thin sheet of paper) which possess only the notion of space of two dimensions.*

E in nota aggiunge:

> *If Gauss, Cayley, Riemann, Schläfli, Salmon, Clifford, Kronecker, have an inner assurance of the reality of transcendental space, I strive to bring any faculties of mental vision into accordance to theirs.*

[69] James Joseph Sylvester, [SYL1869], 1869, pp. 237–239 e pp. 261–263.
[70] Thomas H. Huxley [HUX], 1869

Questa citazione è importante, perché mostra come Sylvester, al pari di Cayley, fosse ben consapevole dell'importanza dell'opera di Schläfli. Negli Stati Uniti, d'altra parte, la popolarità della quarta dimensione era nel frattempo cresciuta, anche prima degli importanti lavori di Stringham. Segno di questo fatto fu, ad esempio, un'ulteriore intervento di Sylvester: l'articolo, che inaugurava il nuovo giornale fondato con la sua decisiva influenza, nel 1878 (proprio gli anni di formazione di Stringham), dell'astronomo John Newcomb già nel titolo[71] faceva riferimento alla quarta dimensione e conteneva l'usuale rappresentazione delle straordinarie proprietà delle figure nella quarta dimensione, in questo caso dell'ipersfera che poteva essere rivoltata senza strappi:

> *If a fourth dimension were added to space, a closed material surface (or shell) could be turned inside out by a simple flexure; without either stretchig or tearing.*

Simon Newcomb[72] (1835 – 1909) è stato il più famoso astronomo americano della seconda metà dell'ottocento. I suoi interessi nei confronti della quarta dimensione sono stati sempre strettamente collegati agli studi di carattere astronomico e ai problemi relativi alla curvature dello spazio. Nel 1877 aveva già espresso il suo punto di vista in un articolo pubblicato in Europa nel Journal di Crelle[73]. Ci limitiamo a citare la sua significativa conclusione:

> *It may also be remarked that there is nothing within our experience which will justify a denail of the possibility that the pace in which we find ourselves may be curved in the manner here supposed. It might be claimed that the distance of the farthest visible star is but a small fraction of the*

[71] Simon Newcomb, [NEW1878], 1878, pp. 1 – 4.
[72] Su Newcomb rinviamo a Albert E. Moyer, [MOY], 1992; Helge Kragh, [*KRA*], 2012
[73] S. Newcomb, [NEW1877], 1877, pp. 293 – 299.

> *greatest distance D, but nothing more. The subjective impossibility of conceiving of the relation of the most distant points in such a space does not render its existence incredible.*

Come si vede la discussione tra "percezione soggettiva" e "realtà fisica" era ormai divenuta una questione all'ordine del giorno negli ambienti scientifici. Sul finire del secolo Newcomb pronunzierà, nella sua veste di presidente della American Mathematical Society, un *presidential address* sull'argomento, rimasto forse il più noto dei suoi interventi sulla quarta dimensione[74].

[74] S. Newcomb, [NEW1898b], 1898, pp. 187 – 195.

5. La riscoperta dei politopi negli anni '80

Negli Stati Uniti, lo studioso che raggiunse comunque risultati più significativi fu Irving Stringham[75] (1847 – 1909), che aveva preso il suo dottorato in matematica presso la John Hopkins University nel 1880, con la supervisione di Sylvester[76]. Nella sua tesi di dottorato Stringham riprende[77], forse senza conoscere i risultati di Schläfli[78], il tema dei politopi. Il matematico americano procede in modo sistematico. Una interessante dimostrazione è quella che riguarda una generalizzazione della formula di Eulero a spazi di dimensione n. Naturalmente l'estensione della formula richiede innanzitutto una adeguata simbologia, così dato un politopo Stringham denota con N_0 il numero di vertici, con N_1 il numero di spigoli, N_2 il numero di facce, ..., N_k il numero di "celle" poliedriche di dimensione k, ... N_n ovviamente $=1$.

Con queste notazioni, la desiderata generalizzazione della formula di Eulero è (per ogni politopo convesso in uno spazio a dimensione n): $1-\sum_0^n (-1)^k N_k = 0$. Per esempio, nel caso $n=3$, $N_0=V$, $N_1=S$, $N_2=F$, $N_3=1$, la formula diviene $1-V+S-F+1=0$, cioè la formula di Eulero.

Fatto questo, Stringham passa alla classificazione dei politopi regolari quadridimensionali, presentandoli tutti e dando per ciascuno una descrizione largamente intuitiva. Egli denota come $n-$fold $(m)-$hedroid un politopo a n dimensioni con m facce di dimensione $n-1$. Così l'ottaedro è denotato come $3-$fold $(8)-$hedroid. La generalizzazione del tetraedro è il $4-$fold $(5)-$hedroid o

75 Un *portrait* di stringham lo si può trovare in https://math.berkeley.edu/about/photos/department-chairs/w-irving-stringham
76 Su Stringham e la sua opera si può consultare Tony Robbin, [ROB], 2006.
77 Whashington I. Stringham [STR1880c], 1880, pp.1-15
78 In realtà è difficile che Sylvester non abbia indicato al suo allievo la traduzione di parte del lavoro di Schläfli pubblicata da Cayley.

pentaedroide che ha 5 vertici, 10 spigoli, 10 facce triangolari e 5 celle tetraedrali. Interessante la costruzione proposta. Disponendo di cinque tetraedri, si procede così:

> *To construct this figure select any one summit of each of four-tetrahedra and unite them. Bring the faces, which lie adjacent to each other, two and two into coincidence. There will remain four faces still free; take a fifth tetrahedron, and join each one of its faces to one of these four remaining ones. The res ulting, figure will be the complete 4-fold pentahedroid.*

Naturalmente si tratta di operazioni virtuali, da svolgere nella quarta dimensione.

Segue la costruzione dell'ipercubo o $4-\text{fold}\ (8)-$hedroid (ottadroide). Questa volta la generazione indicata traslando un cubo ordinario nella direzione perpendicolare allo spazio in cui esso è collocato. Una costruzione divenuta classica e dedotta per analogia dalla costruzione del quadrato e del cubo. Il numero dei vertici N_0 è $16=2^4$, il numero degli spigoli N_1 $32=4\cdot 2^3$, quello delle facce $N_2, 24=\frac{4\cdot 3}{2}2^2$, quello delle celle (cubi), $N_3, 8=\frac{4\cdot 3\cdot 2}{1\cdot 2\cdot 3}2$, infine $N_4=1$. Abbiamo riportato le formule di Stringham per indicare come la sua strategia dimostrativa sia fondamentalmente combinatorica.

Segue l'iperottaedro, il $4-\text{fold}\ (16)-$ hedroid (esadecaedroide) per il quale si hanno 8 vertici (i quattro diametri mutuamente perpendicolari dell'ipersfera, in analogia con l'ottaedro), 24 spigoli, 32 facce e 16 celle (ottaedri).

Stringham conclude questa parte indicando, giustamente, come i procedimenti usati possano essere ripetuti per qualsiasi dimensione. Può quindi concludere: *It appears, then, that every space has at least three regular figures*.

Il primo solido ottenuto è il $4-$fold $(24)-$hedroid, icosatetredroide le cui celle sono 24 ottaedri. Questo ipersolido ha 24 vertici, 96 spigoli e 96 facce triangolari. Diamo qui l'esposizione di Stringham della costruzione di questo ipersolido, senza aver la pretesa di parafrasarla, per mostrare a quali sforzi egli chiamasse le capacità immaginative del lettore:

> *Fig. 7 shows such a summit with six oktahedral boundaries arranged about it symmetrically in three-dimensional space. Conceive Fig. 7 to be transported into four-dimensional space and the interstices between the adjacent triangular faces to be closed up by joining those faces two and two; the figure assumes a form whose projection is represented in Fig. 8 with dotted lines omitted. Adjust to this figure twelve other oktahedra in a symmetrical manner; three of these oktahedra are represented by the dotted lines of Fig. 8. Again, close up the interstices between the adjacent faces; the outline of the figure assumes a form whose projection is represented in Fig. 9. Now, conceive this figure to be turned inside out.*

Segue la $(4)-$fold $(600)-$hedroid (ecatonicosiedroide oggi $600-$celle) che ha 120 vertici, 720 spigoli, 1200 facce, 600 celle tetraedrali e infine la sua figura duale, la $(4)-$fold $(120)-$ hedroid (ecatonicosiedroide oggi $120-$celle) che ha 120 celle dodecaedriche 600 vertici, 1200 spigoli, 720 facce.

Stringham completa il suo tour de force dimostrando, in modo in parte intuitiva, uno straordinario teorema, e cioè che in spazi a dimensioni maggiori di quattro ci sono sempre e soli i tre politopi illustrati per primi l'ipertetraedro, l'ipercubo, l'iperottaedro.

Vogliamo chiudere questa parte citando le belle conclusioni del matematico americano:

> *It will be obvious to the reader of this paper, that the methods herein employed are extremely liable to errors which might materially modify the conclusions drawn, and I shall be surprised if none are found.*

E poi una poesia di Tennyson:

> *Hard, hard, hard it is, only not to tumble*
>
> *So fantastical is the dainty metre*

Forse il più importante contributo di Stringham sta comunque nell'avere, per primo, tentato di rappresentare graficamente i politopi, attraverso le loro proiezioni tridimensionali. Ci pare quindi utile riprodurli qui[79].

[79] Una esposizione moderna di questa rappresentazione, basata sulla successiva interpretazione di Alicia Boole si trova in rete, nel sito dell'American Mathematical Society: http://www.ams.org/samplings/feature-column/fcarc-boole

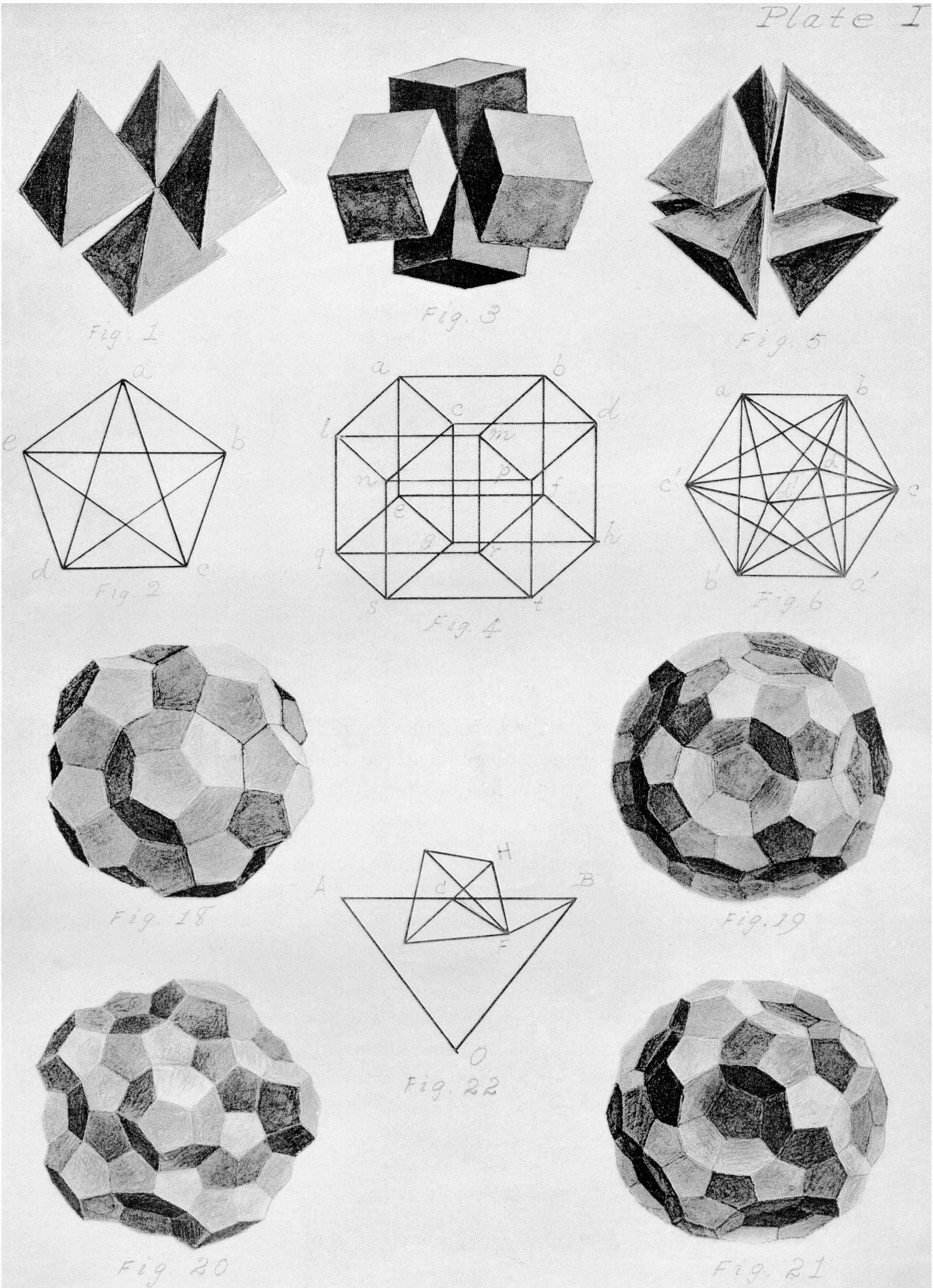


Plate I
Fig. 1
Fig. 3
Fig. 5
Fig. 2
Fig. 4
Fig. 6
Fig. 18
Fig. 19
Fig. 22
Fig. 20
Fig. 21

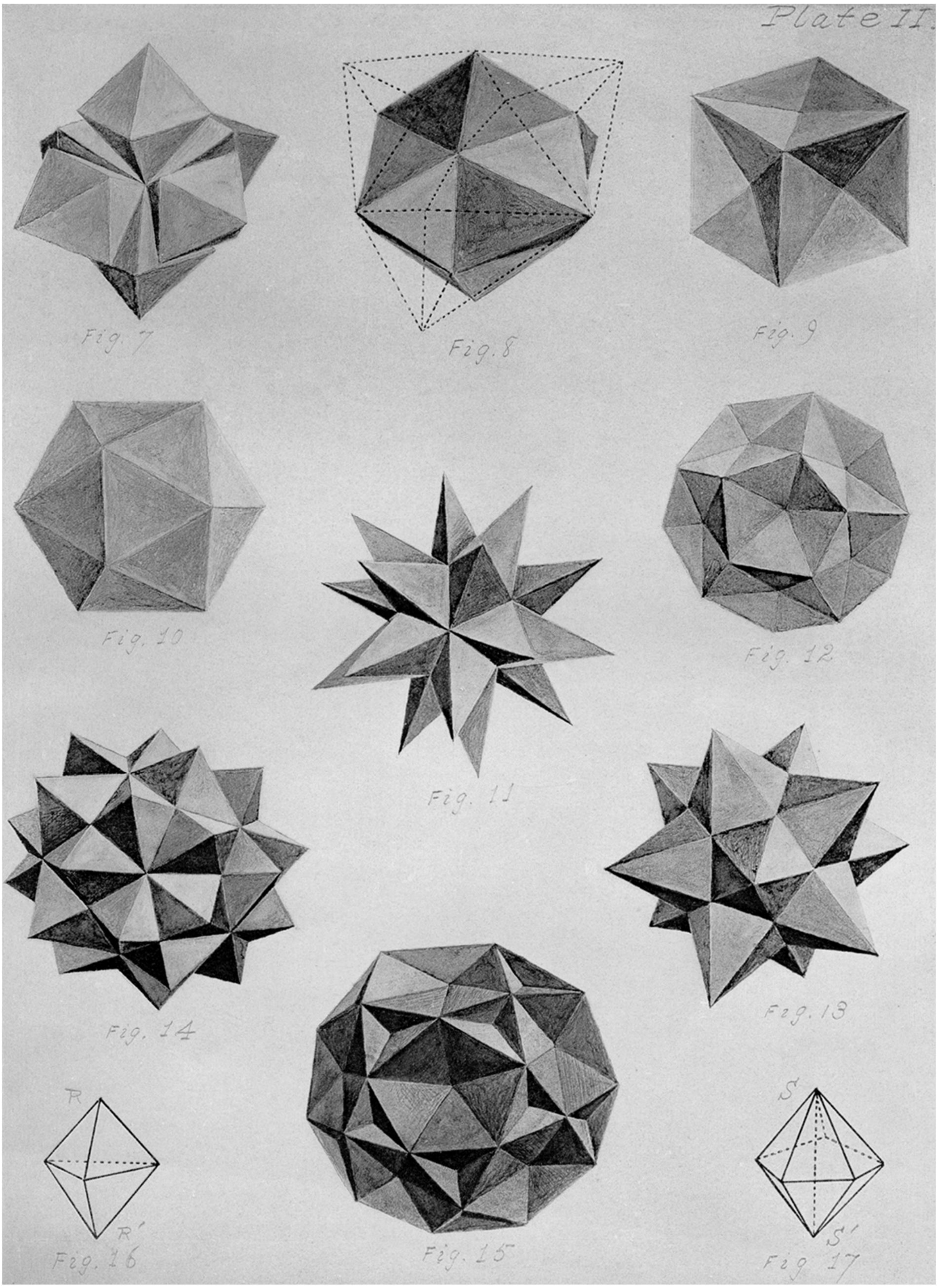


Plate II.
Fig. 7
Fig. 8
Fig. 9
Fig. 10
Fig. 11
Fig. 12
Fig. 14
Fig. 13
Fig. 15
R
R'
Fig. 16
S
S'
Fig 17

I tempi erano maturi. Dopo la pubblicazione del lavoro di Stringham, apparve un gran numero di lavori sugli iperspazi e, come vedremo, da punti di vista diversi. Forse i più significativi interventi, nel corso degli anni '80 furono quelli di Reinhold Hoppe[80] (1816 – 1900) nel 1882, che, come si è già visto, riscoprì i simboli di Schläfli, Victor Schlegel (1843 – 1905) nel 1882[81] e di Ernesto Cesàro[82] (1859 – 1906) del 1887.[83]

Il lavoro di Cesàro merita qualche commento e (futuri) approfondimenti.

A questo lavoro, Coxeter infatti attribuisce la prima costruzione rigorosa del 24 celle $(\{3,\ 4,\ 3\})$.

Cesàro, come è noto, negli anni tra il 1877 e il 1883, aveva studiato a Liegi, presso l'École des Mines, avendo come principale guida matematica Eugene Catalan[84], uno dei maggiori esperti europei nello studio dei poliedri. Per quanto riguarda il lavoro sui politopi citato prima (e concordemente da tutte le fonti storiografiche, ivi compreso Coxeter) come del 1887, la data potrebbe essere profondamente rivista. Infatti, nel volume[85] dedicato alla corrispondenza del matematico napoletano con Luigi Cremona[86] viene riportata una dedica di Cesàro a Cremona nell'articolo, datata Liegi, 1881. Inoltre, riportiamo integralmente la nota:

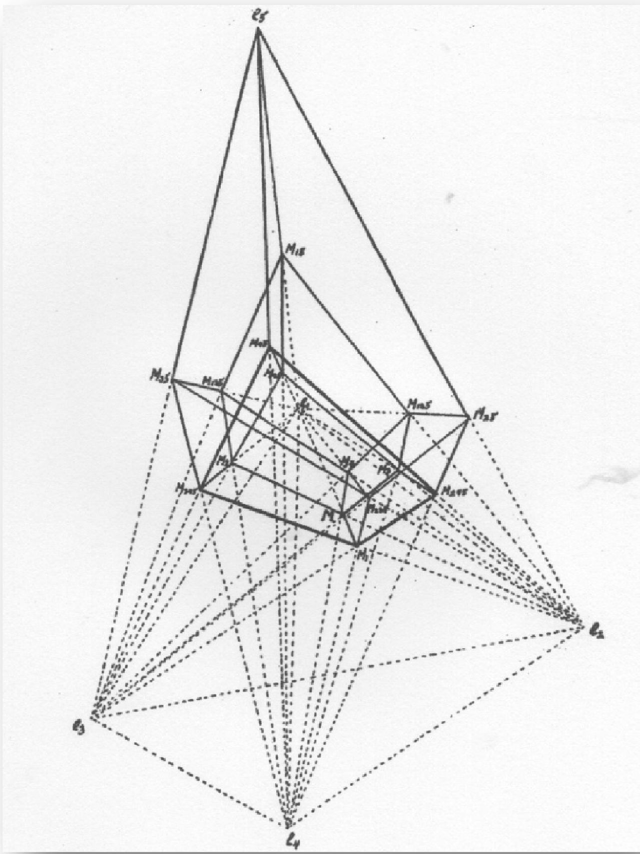
> *I risultati principali di questo lavoro erano stati annunciati, nel 1878, ma apparvero solo nel 1886 (all'ultima , pagina è scritto: Torre Annunziata 1885) editi da Hoepli a Milano, …*

[80] Reinhold Hoppe, [HOP1881b], 1882, pp. 29 – 42.
[81] Victor Schlegel, [SCL1882], 1882.
[82] E. Cesàro, [CES], 1887, pp. 1 – 75.
[83] Su Hoppe leggasi [BIE], 1972. Su Schlegel [ENE], 1905. Su Cesàro [TOG], 1980
[84] Una breve biografia è pubblicata in [RM], 2014
[85] Luciano Carbone, Romano Gatto, Franco Palladino, [CGP], 2002.
[86] Su Cesàro si legga [BrDS], 2009

Pensiamo che una eventuale conferma di queste datazione potrebbe essere interessante e modificare alquanto il quadro complessivo descritto da Coxeter. Comunque, prima di formulare ipotesi, occorrerebbero dei riscontri che purtroppo non abbiamo potuto completare.

Un posto importante riveste, anche ai fini della divulgazione e della visualizzazione dello spazio a quattro dimensioni, l'articolo di Schlegel. Il matematico tedesco di fatto rilegge alla luce della geometria proiettiva e dell'algebra lineare (che lui denota come *la méthode de M. Grassmann*) il recente lavoro di Stringham e, nel corso dell'articolo, introduce magnifiche illustrazioni dei politopi che resteranno come le rappresentazioni più valide dei politopi. Per esempio per l'ipercubo (che Schlegel denota come octaédroid) scrive:

> *la projection d'un octaédroid dans l'espace peut être effectuée de plusieurs manières. La plus commode est la suivante: on construit un hexaèdre au-dedans d'un autre, de sort que les faces de l'un soient situées vis-à-vis de l'autre, et l'on joint par des droites les sommets des deux corps à deux opposés.*



Questa è la rappresentazione più diffusa oggi (di solito si sceglie come punto di visuale un punto situato centralmente sulla parallela ad alcuni spigoli.

E quella al lato è la relativa figura.

Due anni dopo, nel 1884, Schlegel presentava dei modelli materiali dei suoi poliedri, dando inizio a una lunga serie che si sarebbe conclusa con i modelli virtuali contemporanei.

Nel 1891, in un articolo pubblicato in Italia[87], Schlegel presenta anche il suo metodo di proiezione (oggi detti dei diagrammi di Schlegel). Presentiamo qui le illustrazioni che lo accompagnano.

[87] Victor Schlegel, [SCL1891], 1891, pp. 1 – 8.

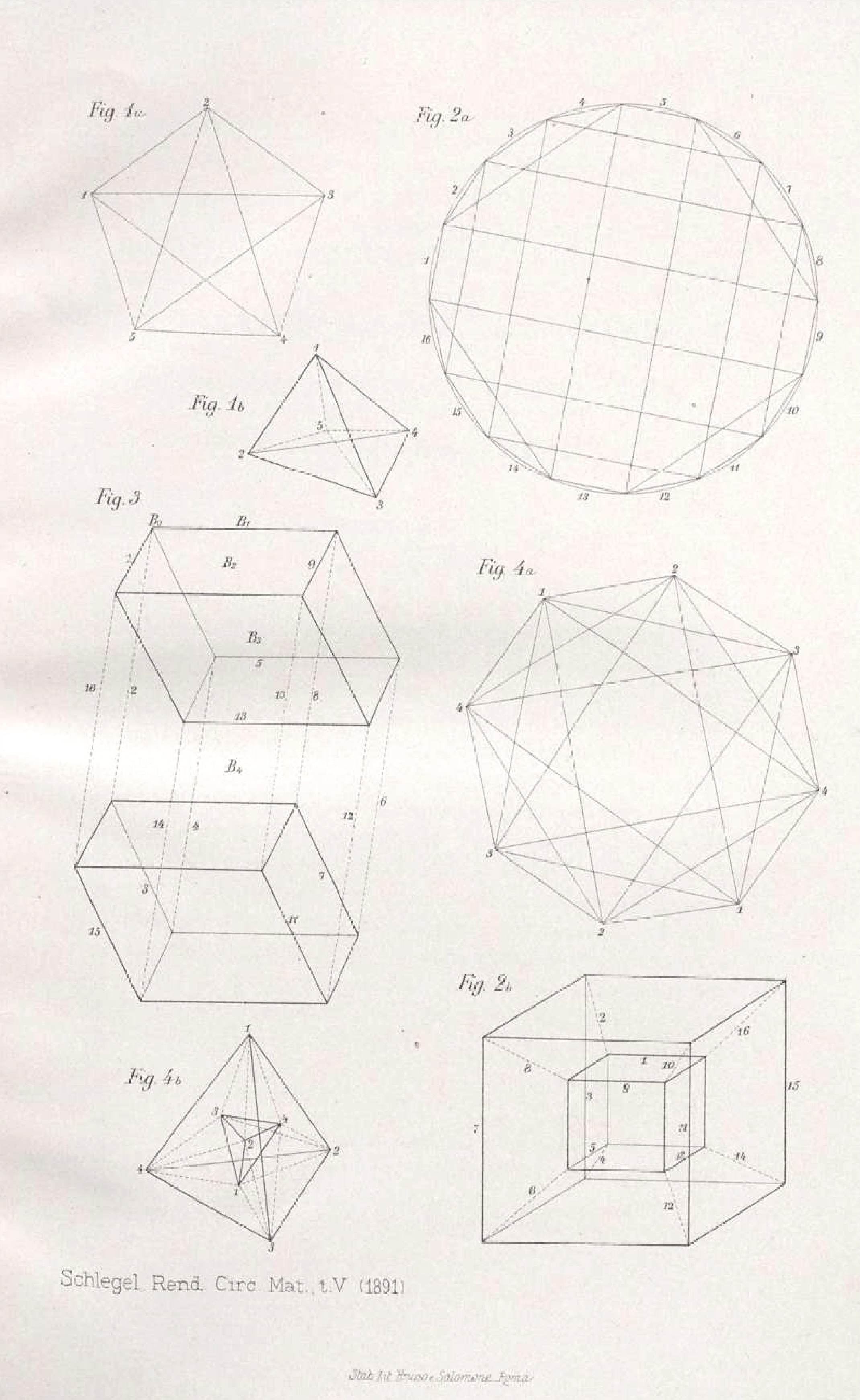


Fig. 1a
Fig. 1b
Fig. 2a
Fig. 3
Fig. 4a
Fig. 2b
Fig. 4b
Schlegel, Rend. Circ. Mat., t.V (1891)
Stab. lit. Bruno e Salomone_Roma

Forse è il momento di una piccola e incompleta riflessione sulla situazione riguardante la geometria iperspaziale nell'ultimo ventennio del XIX secolo. Esistono in quel momento due grandi filoni: da un lato lo studio della geometria discreta sui politopi, naturale compimento dello studio dei poliedri; dall'altro un filone (su cui torneremo più avanti) che potremmo dire continuo dello studio delle ipersuperfici (con metodi proiettivi o differenziali), naturale prosecuzione – ma anche strumento – dello studio delle superfici nello spazio ordinario. Per quanto riguarda il secondo filone, esso conquisterà rapidamente il suo posto non più contestato, anche negli ambienti accademici. La geometria proiettiva iperspaziale della scuola italiana ne sarà la rappresentante più nota.

Certo, questo aspetto degli studi sugli iperspazi non entrò mai in contatto diretto con quello che abbiamo definito il primo filone, quello dello studio dei politopi. Per quanto riguarda questa teoria, che già a metà del secolo aveva conseguito importanti risultati, restò per tutto il periodo alquanto marginalizzata, considerata in qualche modo come geometria elementare, malgrado che qualche interesse avesse suscitato negli ambienti accademici tedeschi (e in quelli, ad essi fortemente collegati, olandesi) e americani. Anche gli aspetti biografici dei matematici che abbiamo considerato (in particolare gli ultimi citati, Schlegel, Hoppe, Cesàro) inducono a riflessioni in questo senso.

6. La scuola italiana

Ventinove anni dopo la dissertazione di Riemann il diciannovenne Corrado Segre[88] scrive nella sua tesi di laurea:

> *La geometria degli spazi ad un numero qualsiasi* n *di dimensioni ha preso ormai il suo posto tra i rami della matematica; e, anche quando la si consideri all'infuori delle importanti delle importanti applicazioni della geometria ordinaria di cui essa è capace, cioè anche quando l'elemento o punto di un tale spazio non si consideri come un ente geometrico dello spazio ordinario (e neppure, il che fa poi lo stesso, come un ente analitico costituito dai valori di* n *quantità variabili), ma bensì come un ente a sé, la natura intima del quale si lascia indeterminata, non si può rifiutare di ammetterla come scienza, in cui tutte le proporzioni sono rigorose, perché dedotte con ragionamenti essenzialmente matematici; la mancanza di una rappresentazione pei nostri sensi degli enti che essa studia non ha molta importanza pel matematico puro. Sorta, si può dire, colla celebre memoria del 1854 di Riemann [...] la geometria a* n *dimensioni va sviluppandosi secondo due vie diverse: l'una riguarda la teoria della curvatura degli spazi e si connette quindi alla geometria non euclidea, l'altra invece studia la geometria proiettiva e gli spazi lineari [...] ed è appunto questa ch'io mi propongo di seguire in questo lavoro. Essa apre ai cultori*

[88] Una biografia scientifica di Segre si trova in : [BRI2013], 2013

della matematica un campo sconfinato di ricerche pieni di interesse. [89]

Segre quindi segna come punto di inizio dello studio degli spazi ad *n* dimensioni la dissertazione di Riemann, ma indica anche il trentennio che lo separa da tale incipit come un periodo temporale in cui si sono sviluppate due logiche diverse di trattazione dell'argomento: quella che fa capo alla teoria della curvatura degli spazi e che si connette alla geometria non euclidea, e quella che studia la geometria proiettiva che egli predilige nella stesura del suo lavoro.

Il giovanissimo Segre, con la sua tesi di laurea, taglia l'impostazione empirista nella scuola italiana della geometria a cui erano legati Eugenio Beltrami, Giuseppe Veronese e Giuseppe Peano[90], e comincia a dare, quasi ad essere un anticipatori di David Hilbert, un nuovo linguaggio assiomaticamente strutturato. Questi punti di vista erano nati, sia pure in forma diversa, pochi anni prima per opera di Giuseppe Veronese.

Veronese e gli spazi a più dimensioni.

Giuseppe Veronese[91] (1854-1917) si è distinto non solo per il suo non indifferente contributo alla scuola matematica italiana, ma anche per il suo impegno politico.

Alla sua prima esperienza scolastica, da studente all'Istituto Tecnico di Venezia, ha come docente di matematica il prof. Pietro Cassani[92] che gli segnerà la vita, in quanto è uno studioso degli spazi multidimensionali. Nel 1872, all'età di 18 anni, si licenzia da scuola e comincia a lavorare a Vienna per qualche tempo e successivamente, grazie all'aiuto del principe Nicolò Papadopoli riesce ad iscriversi al Politecnico di Zurigo, dove si fa apprezzare dai suoi insegnanti oltre che da Luigi

[89] C. Segre, [SEG1961], 1963, p.26
[90] A. Brigaglia, [BRI2013], 2013, pagg. 415-474
[91] La biografia approfondita e scientifica di Veronese può essere letta in [BRI2013], 2013 e in [CAN1999], 1999
[92] Brevi note biografiche in [DES], 1978

Cremona e Giuseppe Battaglini. Viene così ammesso all'Università di Roma e nel 1880 può andare a perfezionarsi prima a Berlino e successivamente a Lipsia dove conosce Felix Klein.

Nel 1881 vince la cattedra di geometria analitica all'Università di Padova lasciata libera da Giusto Bellavitis (1803-1880) e la occuperà sino alla fine dei suoi giorni aggiungendo anche l'insegnamento di geometria superiore.

Nel 1882 pubblica una memoria in cui per la prima volta si tratta esclusivamente la geometria multidimensionale e nel 1889 una memoria sulla "geometria non archimedea" che nel 1892 sarà aspramente criticata da Giuseppe Peano e sarà al centro di una polemica insieme a Corrado Segre a causa del suo scarso rigore espositivo e l'uso poco giustificato di infiniti e infinitesimi.[93] A conclusione della sua Peano nega fortemente che il lavoro di Segre possa suscitare in alcuno alcun interesse.

In realtà questa critica ha ha contribuito a sviluppare la ricerca di fondamenti più rigorosi per la matematica in generale e per la geometria in particolare, ma anche che non deve mai essere defiita totalmente negativa la conclusione poiché spesso varie nozioni matematiche importanti vengono introdotte con un rigore poco soddisfacente, riuscendo comunque ad aprire utili prospettive. In particolare la nozione di geometria non archimedea è stata ampiamente accettata e Veronese è particolarmente conosciuto per alcune ipotesi riguardanti la continuità, che furono poi fondamentali per lo sviluppo del concetto del continuo lineare non-archimedeo.[94]

Con la memoria del 1882 ha presentato una visione radicalmente nuova della geometria iperspaziale. Il suo punto di vista è semplice: come una curva piana dotata di singolarità può essere studiata in modo efficace come proiezione di una curva nello spazio, così è possibile studiare le superfici complesse dello

[93] Si veda a proposito Carlo Felice Manara, Maria Spoglianti, [MaSp]. 1977

[94] Paola Cantù, [CAN1999], 1999

spazio ordinario come proiezioni o sezioni di ipersuperfici. In questo modo la geometria degli iperspazi veniva ad essere legittimata non solo sul piano "filosofico", ma anche come strumento essenziale di lavoro per i geometri algebrici.

L'esempio più famoso del lavoro del matematico veneto riguarda la cosiddetta superficie di Veronese. Questa superficie nello spazio proiettivo a cinque dimensioni è definita dalla mappa di Veronese, data da:

$$(x, y, z) \to (yz, xz, xy, x^2, y^2, z^2) \to (yz, xz, xy, x^2+y^2+z^2, y^2+z^2, z^2).$$

L'importanza di questa superficie sta nel fatto che la sua proiezione dà la superficie (nello spazio ordinario) romana di Steiner. Un rapido esame a questo fatto può chiarire un poco. La proiezione da P^5 a P^3 è dato dalla corrispondenza

$$(yz, xz, xy, x^2+y^2+z^2, y^2+z^2, z^2) \to (yz, xz, xy, x^2+y^2+z^2)$$

che, nel piano affine è

$$\left(\frac{yz}{x^2+y^2+z^2}, \frac{xz}{x^2+y^2+z^2}, \frac{xy}{x^2+y^2+z^2}\right)$$

cioè le coordinate della superficie romana. In questo modo, come scriverà più tardi Federigo Enriques

> *il concetto di geometria astratta* [cioè iperspaziale] *ha ricevuto un grande sviluppo, divenendo (dopo Segre) un ordinario istrumento di lavoro nelle mani dei geometri italiani contemporanei.*

Il punto di vista di Segre

Pochi mesi dopo l'apparizione del secondo articolo di Veronese, lo stesso Corrado Segre presenterà un articolo in cui la stessa superficie sarà presentata da un punto di vista diverso, più aderente a quello di Plücker.

Corrado Segre (1863-1924), piemontese di Saluzzo, Infatti si è diplomato a soli dieci anni all'Istituto Tecnico Sommeiller sotto la guida del prof. Giuseppe Bruno che l'ha convinto a proseguire gli studi in matematica anziché in ingegneria come voleva il padre. Sedicenne era già iscritto all'Università di Torino dove si è laureato nel 1883, prima dei suoi vent'anni.

Se il suo insegnante di matematica fu determinante per le scelte universitarie di Corrado, anche all'Università il ragazzo incontrò insegnanti di un certo spessore come D'Ovidio, Genocchi e Faà di Bruno. In particolare Enrico D'Ovidio (1843-1933) molisano di Campobasso della scuola napoletana di Giuseppe Battaglini[95] con il quale aveva studiato e dal quale aveva colto un notevole spirito analitico e l'interesse per la geometria della retta, per le geometrie non euclidee e per la geometria iperspaziale, fu per Segre un insegnante che lo segnò parecchio nelle scelte di studio negli anni che seguirono.

Segre apparteneva ad una famiglia ebrea ed una comunità ebraica nazionale che aveva dato un grande contributo allo sviluppo della matematica del suo tempo[96]. La sua famiglia piuttosto agiata, in quegli anni di studi universitari del giovanissimo matematico, ebbe un durissimo colpo quando il padre, a causa del dissesto economico improvviso, si tolse la vita.

Contemporaneamente l'Università di Torino si stava trasformando in uno dei poli accademici di maggior rilievo, non solo per l'apporto dato da D'Ovidio, Genocchi e Faà di Bruno, ma anche per quello di Peano e Segre, che nel giro di pochi anni faranno di Torino il principale centro di logica e fondamenti di matematica e geometria algebrica.

[95] Antonella Bastai Pratt, Dizionario Biografico della Treccani, http://www.treccani.it/enciclopedia/enrico-d-ovidio_(Dizionario-Biografico)/

[96] Aldo Brigaglia, [BRI2013], 2013

La tesi di laurea di Segre, *Sullo studio delle quadriche in uno spazio lineare ad un numero qualunque di dimensioni*[97] rappresenta un lavoro di un certo rilievo nella storia della geometria iperspaziale, e quelli che seguirono, grazie alla collaborazione che cominciò nei mesi a seguire con Felix Klein furono articoli di un certo spessore. Già nello stesso anno della laurea, nel 1883, il giovane Segre pubblicava insieme a Gino Loria il suo primo articolo sui *Mathematische Annalen*[98] e nei mesi successivi scrisse altri sedici articoli. In tutta la sua vita accademica, tenendo conto soltanto delle pubblicazioni originali di ricerca, i suoi scritti sono in totale 76, e la sua attività maggiore si concentra maggiormente entro la prima metà degli anni '90 dell'ottocento.

Per un approfondimento sulla vita di Corrado Segre, si rimanda al già citato testo di Aldo Brigaglia, *Per una biografia scientifica di Corrado Segre*, estratto da *La Matematica nella Società e nella Cultura*, rivista della Unione Matematica Italiana (I), VI, Dicembre 2013, pagg. 415-474, Bologna

Tornando all'articolo cui abbiamo accennato, quello in cui Segre mostra di avere un punto di vista diverso da quello di Veronese, il matematico afferma che lo spazio che viene considerato è quello i cui punti sono rappresentati da coniche, uno spazio proiettivo evidentemente di dimensione 5, un S_5, nel linguaggio di Segre. In esso i fasci di coniche costituiscono le rette (S_1), le reti i piani (S_2), i sottospazi a tre dimensioni gli spazi (S_3) e infine quelli a 4 dimensioni gli iperpiani (S_4). Ora consideriamo le coniche degeneri, che costituiscono una varietà, *M,* a quattro dimensioni. Ogni fascio possiede tre coniche degeneri, quindi in linguaggio iperspaziale ogni retta interseca *M* in tre punti. *M* è quindi una varietà cubica a quattro dimensioni, una M_4^3. Inoltre se *F* è la varietà bidimensionale delle coniche doppiamente degeneri, si ha che uno spazio contiene quattro punti di *F* che

97 La tesi sarà pubblicata in due parti distinte, negli Annali dell'Accademia di Torino: Corrado Segre, [SEG1883a], 1883, 3-86; in [SEG1961], 1961, pp.25-126. http://www.bdim.eu/item?id=GM_Segre

98 Corrado Segre e Gino Loria, [SeLo1883c], 1883, p. 213-234

costituisce quindi una superficie bidimensionale di quarto grado, una F_2^4, che coincide con la superficie di Veronese. Un esame analitico dei ragionamenti sintetici di Segre può chiarire il procedimento ad un lettore moderno.

La corrispondenza che a una conica associa un punto di P^5 è data evidentemente da

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}xz + 2a_{23}yz + a_{33}z^2 = 0 \rightarrow (a_{11}, a_{22}, a_{33}, a_{12}, a_{13}, a_{23})$$

Le coniche degeneri sono quelle a determinante nullo e soddisfano quindi all'equazione

$$a_{11}a_{22}a_{33} + 2a_{12}a_{13}a_{23} - a_{11}a_{23}^2 - a_{22}a_{13}^2 - a_{33}a_{12}^2 = 0$$

e costituiscono quindi la nostra M_4^3. Le coniche doppiamente degeneri sono date dalle rette doppie $(ax + by + cz)^2 = 0$ e quindi soddisfano alle equazioni parametriche

$$(a_{11} = a^2,\ a_{22} = b^2,\ a_{33} = c^2,\ a_{12} = ab,\ a_{13} = ac,\ a_{14} = bc)$$

che danno la F_2^4.

Segre confronta il suo metodo, in cui il "punto" dell'iperspazio rimane indefinito e può assumere diverse rappresentazioni concrete (rette, coniche, ...) con quello di Veronese:

> *Il signor Veronese nelle sue importanti ricerche di geometria ad n dimensioni si pone da un punto di vista diverso, in quanto che per lui "l'elemento generatore (di uno spazio) non è già un elemento di natura qualsiasi, ma il punto tale quale ce lo immaginiamo nel nostro spazio". Con ciò mi pare che, mentre scema quella gran fecondità della geometria a più dimensioni, a cui ho già accennato, si va incontro all'obiezione che il punto, quale lo si concepisce nel nostro spazio e appunto per il modo con cui lo concepiamo, non è*

> *più concepibile fuori di esso, ove potrebbe anche non esistere.*[99]

Come si è già detto seguendo il pensiero di Enriques, la geometria iperspaziale nella scuola di Segre divenne uno strumento di lavoro nelle mani dei geometri algebrici italiani. Questo aspetto prescinde dalle finalità di questa tesi e quindi non verrà ulteriormente approfondito. Ci pare però interessante chiudere questo paragrafo con quanto scrive Segre, qualche anno più tardi, sull'argomento, preoccupato che *tuttora, anche in Italia, non si sappia collocare la geometria ad n dimensioni al suo giusto posto*. Ci si permetta quindi una lunga citazione. Scrive Segre:

> *Si posson distinguere tre modi sotto cui si son presentati gli iperspazi ai geometri; e ad essi corrispondono altrettante maniere di definire i punti di uno spazio lineare ad n dimensioni. Anzitutto, se, in base al metodo delle coordinate, si considerano i punti della retta, del piano o dello spazio come rappresentanti delle varietà analitiche composte da tutti i valori possibili di un numero, o di due numeri, o di tre, sicché i sistemi di equazioni ad una, due, o tre variabili vengono rappresentati da aggruppamenti di punti, ecc., ecc., si è condotti naturalmente ad estendere il linguaggio geometrico al caso di un numero qualunque n di variabili, chiamando ancora punto un gruppo qualunque di valori (coordinate del punto) di n variabili, spazio (ad n dimensioni) l'insieme di tutti questi punti o gruppi di valori, curva o superficie la varietà costituita dai punti le cui coordinate*

[99] Atti R. Acc. Scienze Torino, Vol. 20 (1884-85), p. 487–504 in: Corrado Segre, [SEG1961], 1963, p. 1–17

sono date funzioni (colle debite restrizioni) di uno o due parametri ... , ecc. ecc. Tale estensione si è presentata come una necessità in un gran numero di ricerche, sia per dar loro la massima generalità, sia per conservare in esse il carattere intuitivo proprio della geometria. Ma è stato osservato che con ciò non si viene più a fare della vera geometria, poiché gli enti considerati sono essenzialmente analitici; e che ad esempio la geometria projettiva generale che così si viene a costruire non è altro in sostanza che l'algebra, delle trasformazioni lineari.

Un modo geometrico di giungere agl'iperspazi si ha seguendo il concetto di Plücker di considerare quali elementi (punti) di una varietà (di uno spazio) enti geometrici dello spazio ordinario, come gruppi di punti, curve, superficie, [...] i quali dipendano da un numero qualsiasi di parametri. È così che, seguendo Plücker, le rette dello spazio ordinario si posson considerare, come i punti di uno spazio a 4 dimensioni. Però se si vogliono in questa rappresentazione evitare gli elementi eccezionali, se si vuole cioè rappresentare linearmente una varietà ∞^n *di enti geometrici ordinari coi punti di un iperspazio (lineare), conviene che quella varietà sia lineare. [...] Questo modo di rappresentazione si è offerto spontaneamente ai geometri che hanno voluto approfondire le questioni sui sistemi infiniti di curve piane (o di superficie). È chiaro che stando a questo modo di concepirla, la geometria degli iperspazi non presenta più alcuna novità di concetto: essa rientra nella* *geometria ordinaria, occupandosi delle varietà di enti che in questa compaiono.*

Infine si può riguardare lo spazio ad n dimensioni come definito al modo stesso di quello ordinario, solo che si tolga il postulato delle 3 dimensioni, e si modifichino in conseguenza alcuni di quelli relativi alla retta ed al piano. Allora i punti dell'iperspazio sono i punti tali quali ce li immaginiamo nello spazio ordinario, e non più enti puramente analitici, od enti geometrici di qualunque natura. A questo concetto son giunti specialmente coloro che hanno discusso i fondamenti della geometria, cercando quali postulati della scienza ordinaria si posson togliere senza troppi inconvenienti. E fu esso appunto che venne spesso confuso colla questione (fisica o filosofica, ma non matematica) del numero delle dimensioni che lo spazio ordinario (fisico) ha effettivamente [...]

In ognuno di questi modi di considerare gli spazi lineari in geometria vi è qualche vantaggio; e si può specialmente notare che il 1° è molto generale e molto semplice, ma analitico, mentre il 3° è geometrico e pienamente intuitivo, ed il 2° è quello che più immediatamente si presta alle più numerose applicazioni per lo spazio ordinario. Ma la distinzione di questi modi non corrisponde poi a trattazioni diverse della geometria (projettiva) a n dimensioni. Anzi pel matematico essa non ha una vera importanza. Egli può evitare di farla e lavorare negl'iperspazi senza fissare quale sia tra le varie definizioni quella che egli sceglie; e può a *dirittura tenerle tutte, per avere maggior quantità di rappresentazioni e d'interpretazioni dei risultati.*[100]

[100] Corrado Segre, [SEG1891a] 1, 1891, pp. 42 – 66.

7. Alicia Boole Stott, Schoute e Coxeter

Sebbene Schläfli fosse piuttosto ben noto ai suoi colleghi nella seconda metà del secolo, specialmente per i suoi contributi all'analisi complessa, il suo iniziale lavoro di geometria non ottenne la giusta attenzione per lungo tempo. Sul finire del secolo una delle figure preminenti nel campo dello studio dei politopi fu Pieter Hendrik Schoute[101] (1846 – 1913) un matematico olandese esperto di geometria algebrica, professore all'università di Groningen dal 1881.

Nel 1894 Schoute pubblicò un articolo in cui calcolava analiticamente le sezioni centrali dei sei politopi regolari in quattro dimensioni e Boole Stott venne a sapere della pubblicazione quando suo marito gliela propose e vide che i suoi risultati coincidevano con quelli del geometra olandese, pertanto Alicia inviò le foto dei suoi modelli che illustravano non solo la sezione centrale di ogni politopo che era stata calcolata da Schoute. Sorpreso dai risultati di Boole Stott Schoute la contattò immediatamente proponendole una collaborazione che durò per quasi vent'anni, sino alla morte dello stesso Schoute nel 1913. Durante questo periodo Schoute nel momento in cui poteva permettersi una vacanza di riposo si recava in Inghilterra per lavorare con Boole Stott sui diversi aspetti della geometria tetradimensionale. Per dirla con Coxeter, *Mrs. Stott power of geometrical visualization supplemented Schoute's more orthodox methods, so they were an ideal team*[102].

Alicia Boole Stott (1860-1940) era donna e a causa delle regole della società e del tempo in cui viveva le sue possibilità furono molto limitate. Nonostante tutto ottenne grandi risultati in geometria grazie alla sua capacità di visualizzare la quarta dimensione. Alicia era la terza di cinque figlie di Georges Boole, il celebre

[101] Di Schoute si trova un'accurata biografia in [OCR2010], 2010
[102] Donald Coxeter, [COX], p. 366.

logico. Perse il padre all'età di quattro anni e visse fino a undici anni presso alcuni parenti a Cork, in Irlanda, mentre la mamma si trasferì a Londra con le altre quattro figlie. Si ricongiunse alla famiglia quando divenne adolescente ed ebbe un grandissimo esempio educativo da parte della madre la quale, dissociandosi dagli stereotipi del periodo le permise di studiare materie scientifiche, "pratica" che in Inghilterra era fortemente ostacolata nei confronti delle donne.

Nel periodo in cui vissero a Londra le quattro donne della famiglia Boole ricevevano le frequenti visite del professor Howard Hinton, un insegnante di scuola secondaria la cui materia di insegnamento era la matematica. Hinton parlava spessissimo della sua idea di spazio tetradimensionale e discuteva su come rappresentare le figure della quarta dimensione: costruì dei cubi di legno e li utilizzò per mostrare le proiezioni tridimensionali dell'ipercubo. Alicia era fortemente affascinata dalle spiegazioni di Howard al punto che diede un grosso aiuto nel trovare rappresentazioni tetradimensionali a cui lo stesso matematico non aveva pensato e strabiliandolo per le sue doti particolarmente acute. L'aiuto di Alicia fu incisivo anche per la stesura del testo che scrisse in quel periodo Hinton: *The fourth dimension*, in cui il tema della quarta dimensione era trattato dal punto di vista filosofico.

Alicia si sposò nel 1890 con l'attuario Walter Stott da cui ebbe due figli. Pur assolvendo ai suoi compiti di mamma e "donna di casa", riuscì a studiare da autodidatta ed approfondire il tema della geometria iperdimensionale in modo isolato e senza avere contatti col mondo scientifico, e riuscì a dimostrare che esistono solo sei politopi regolari nella quarta dimensione. Questi politopi erano stati elencati per la prima volta da Schläfli nel 1850 nel trattato che come già detto, è stato pubblicato nel 1901 dopo la sua morte.

I sei politopi regolari sono, come si è visto, l'ipercubo (o iperesaedro), l'ipertetraedro, l'iperottaedro, il 24-celle, il 120-celle ed il 600-celle. Il lavoro di

Alicia consistette nel dimostrare che questi sono gli unici politopi regolari quadridimensionali, e di essi ne ricostruì sia graficamente le sezioni tridimensionali sia modelli in cartone. Ella ha inoltre scoperto molti politopi semi-regolari a quattro dimensioni.

Il lavoro di Boole Stott ebbe il suo coronamento con il conseguimento del suo dottorato ad honorem all'Università di Groningen nel 1914 come riconoscimento per il contributo che ha dato per l'approfondimento della geometria a quattro dimensioni: nel 1900 e nel 1910 ha pubblicato i suoi risultati in due articoli.

Nel 1900 Alicia, in *On certain series of sections of the regular four-dimensional hypersolids* descrive geometricamente le sezioni degli ipersolidi quadridimensionali, le classifica e le descrive enumerandole proponendone un'analisi grafica. Boole Stott afferma che così come un poliedro tridimensionale può essere sviluppato in un piano bidimensionale, anche un politopo quadridimensionale può essere sviluppato in uno spazio tridimensionale e una volta effettuato tale sviluppo il politopo può essere analizzato più semplicemente e in un certo modo anche visualizzato. Alicia Boole Stott costruì alcuni modelli di cartone di diverse sezioni dei politopi regolari che adesso sono esposti in mostra al museo dell'università di Groningen.

Le figure che seguono riportano:

- *fig. 1 -* alcuni dei modelli costruiti da Boole Stott e attualmente conservati all'università di Groningen
- *fig. 2-6 -* sezioni dei politopi regolari disegnati da A. Boole Stott.

Figura 1

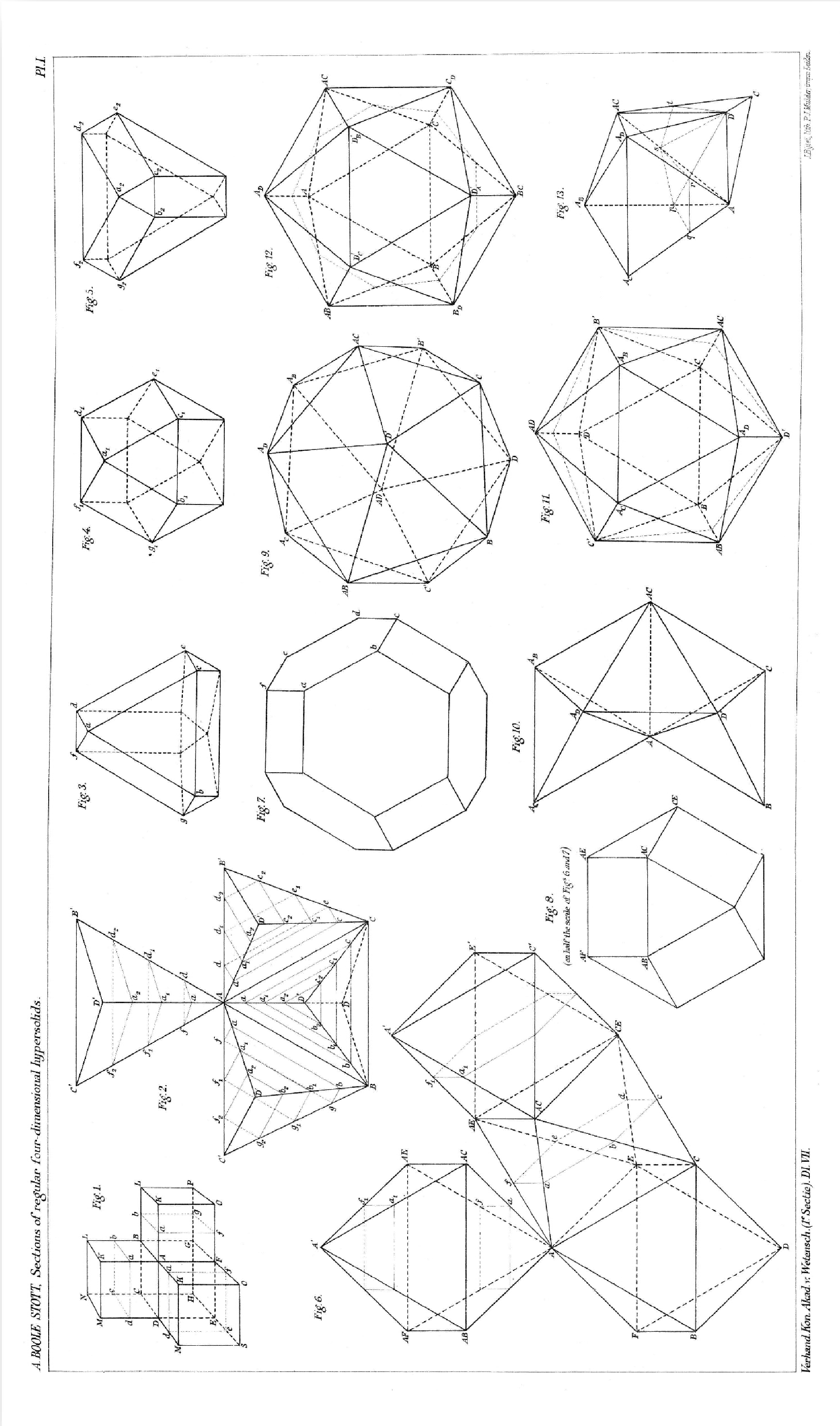


Figura 2

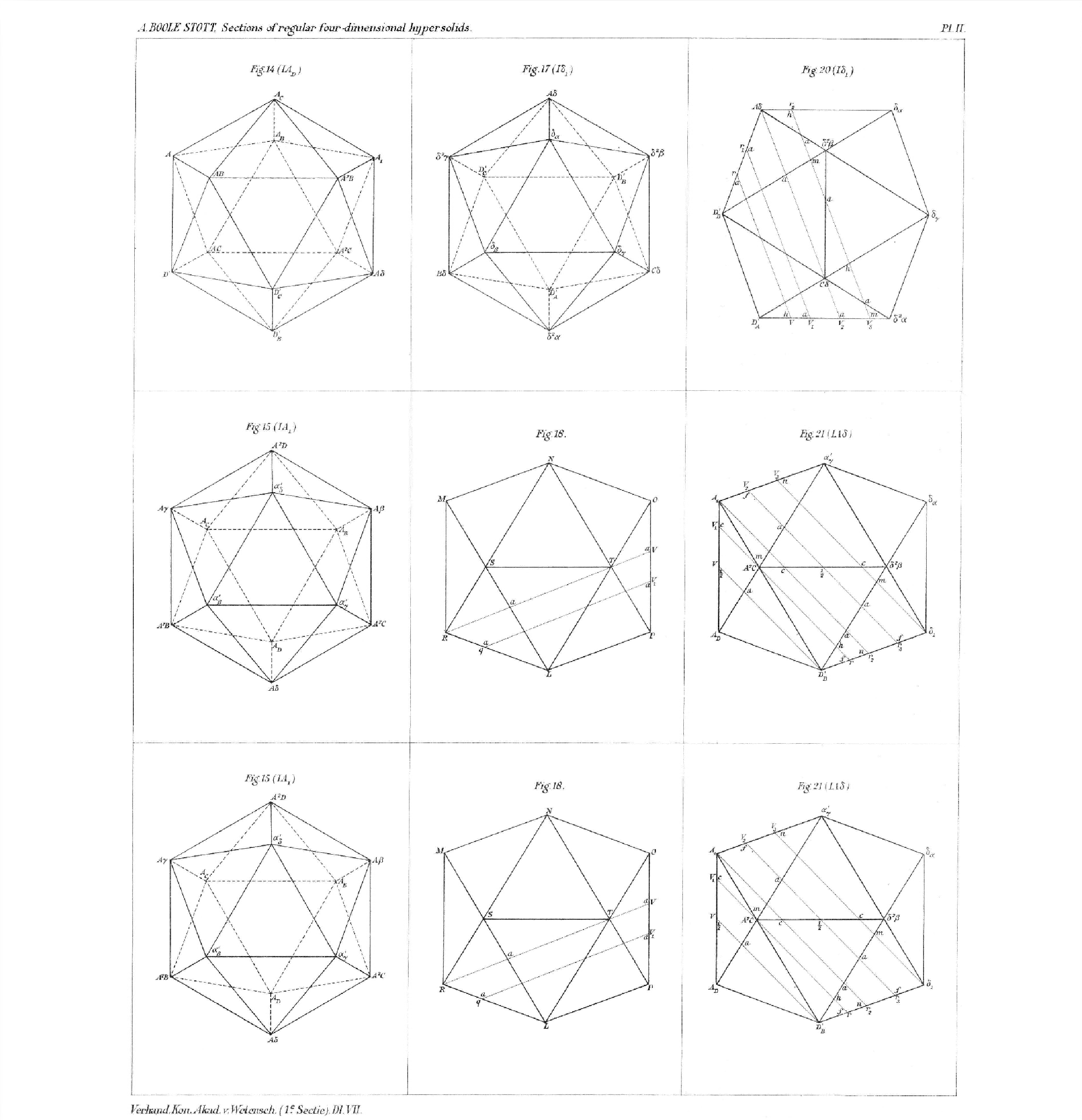

A. BOOLE STOTT. Sections of regular four-dimensional hypersolids.
Pl. II.
Fig. 14
Fig. 17
Fig. 20
Fig. 15
Fig. 18.
Fig. 21
Fig. 15
Fig. 18.
Fig. 21
Verhand. Kon. Akad. v. Wetensch. (1e Sectie). Dl. VII.

Figura 3

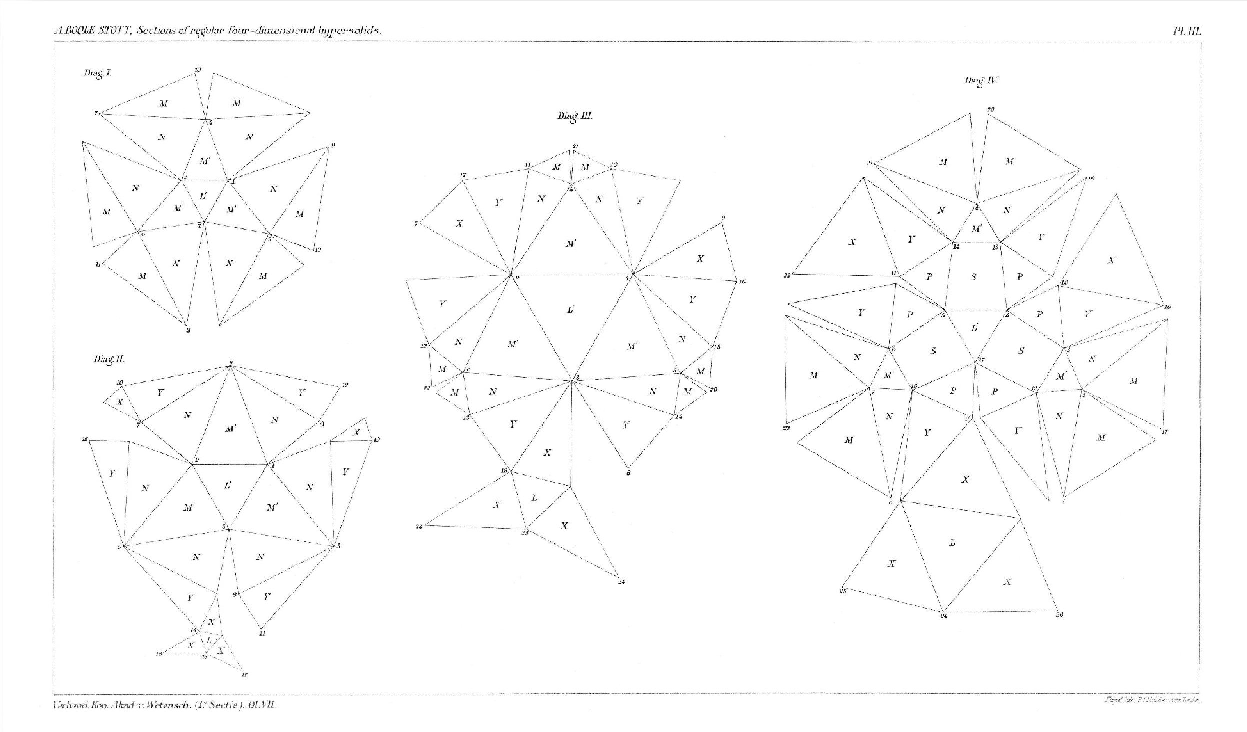


Figura 4

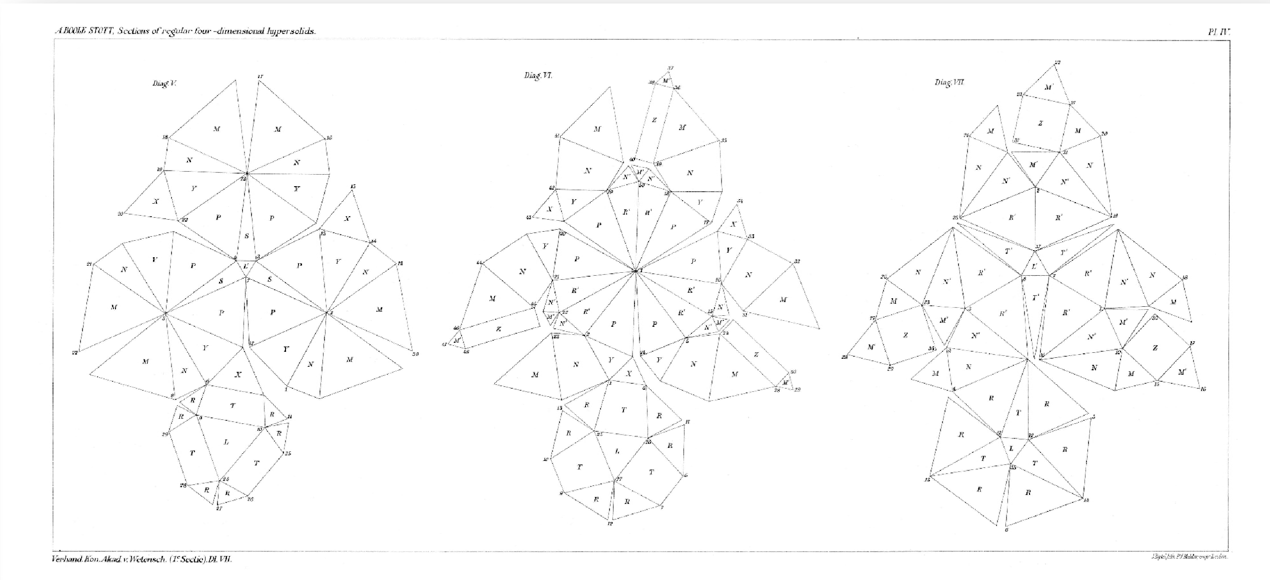


Figura 5

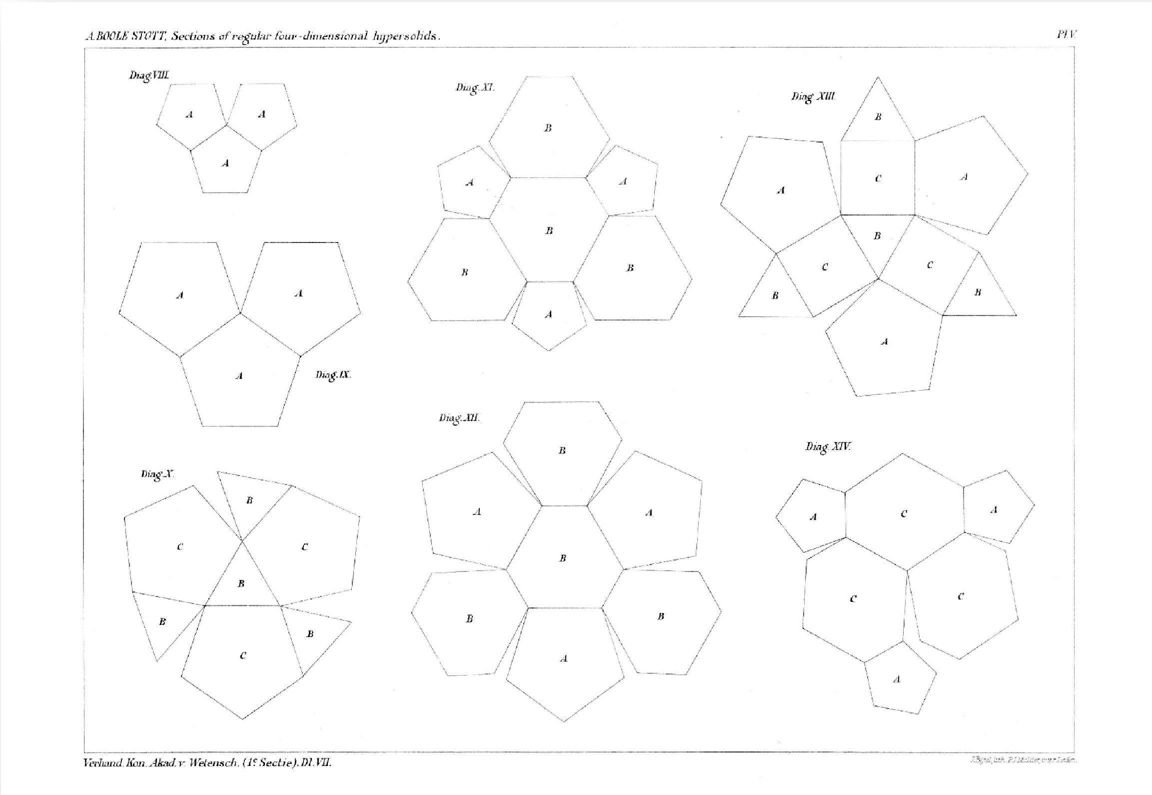

A. BOOLE STOTT, Sections of regular four-dimensional hypersolids.
Pl. V
Diag. VIII.
Diag. IX.
Diag. X.
Diag. XI.
Diag. XII.
Diag. XIII.
Diag. XIV.
Verhand. Kon. Akad. v. Wetensch. (1e Sectie). Dl. VII.

Figura 6

Nell'articolo del 1910, *Geometrical deduction of semiregular from regular polytopes and space filings* Boole Stott sviluppò un metodo per ottenere politopi semi-regolari partendo da quelli regolari. Il suo metodo consiste nell'applicare l'operazione di espansione (o anche quella della inversa di contrazione) a un politopo regolare dato (cioè si sposta l'insieme di vertici –celle, facce, etc. – dal centro del politopo fino a quando non si ottiene un politopo semi-regolare).

Compiendo queste operazioni nella quarta dimensione, Boole Stott riesce ad ottenere quarantacinque diversi politopi semi-regolari: anche se alcuni di tali politopi sono conosciuti per il lavoro di Willem Abraham Whythoff del 1918 [103]

Alcuni casi particolari tridimensionali si possono vedere nelle figure 7-9 che Boole Stott propone nel suo articolo.

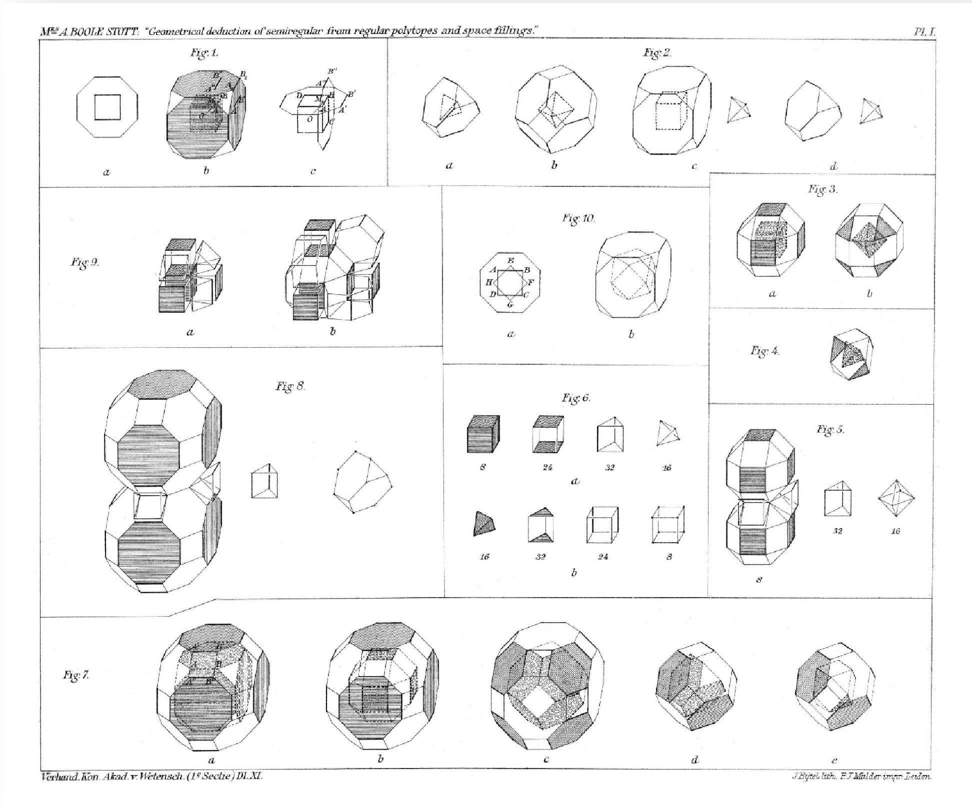


Figura 7

[103] Willelm Abraham Whythoff , [WHY] 1918, pp.966–970

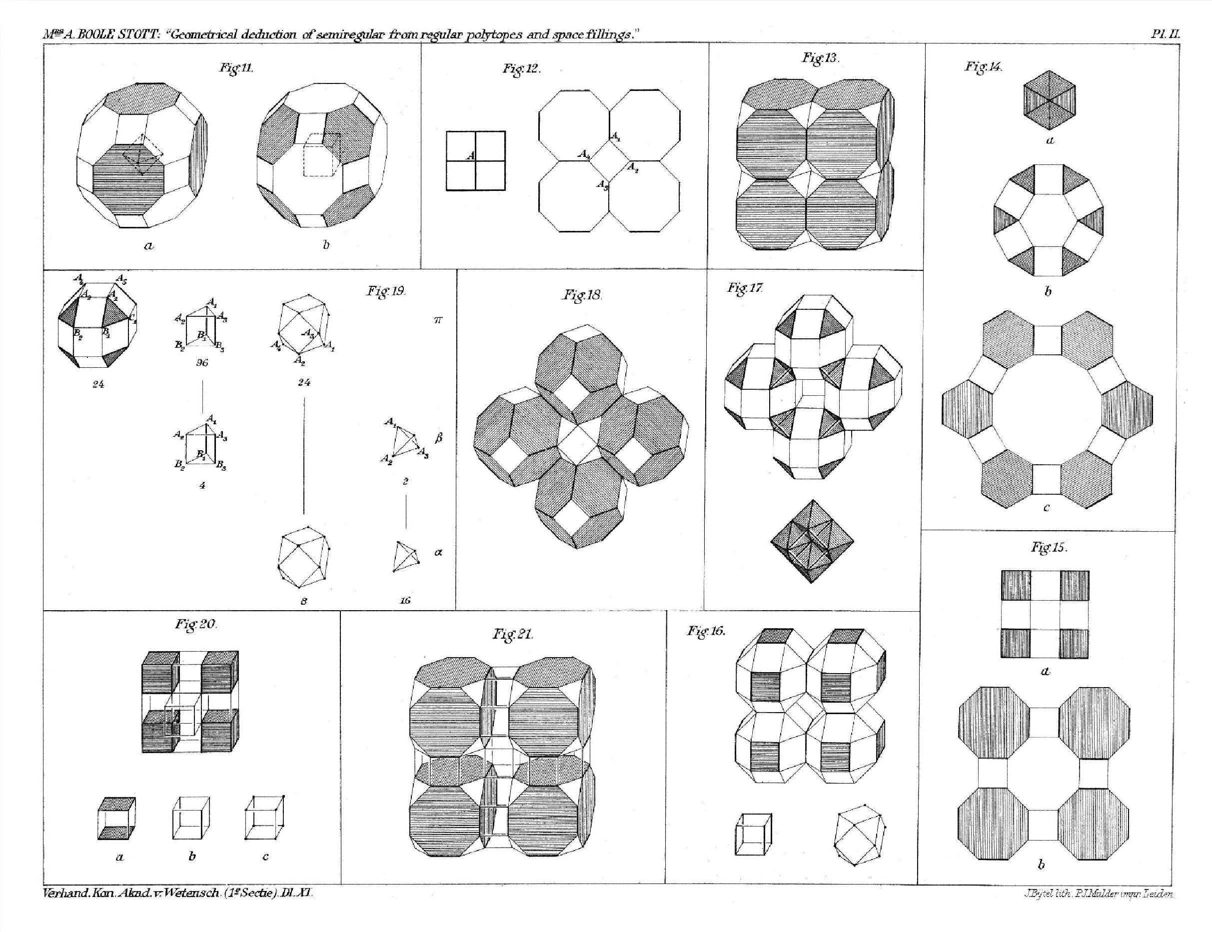

Mrs A. BOOLE STOTT: "Geometrical deduction of semiregular from regular polytopes and space fillings."
Pl. II.
Fig. 11.
Fig. 12.
Fig. 13.
Fig. 14.
Fig. 19.
Fig. 18.
Fig. 17.
Fig. 15.
Fig. 20.
Fig. 21.
Fig. 16.
Verhand. Kon. Akad. v. Wetensch. (1e Sectie) Dl. XI.

Figura 8

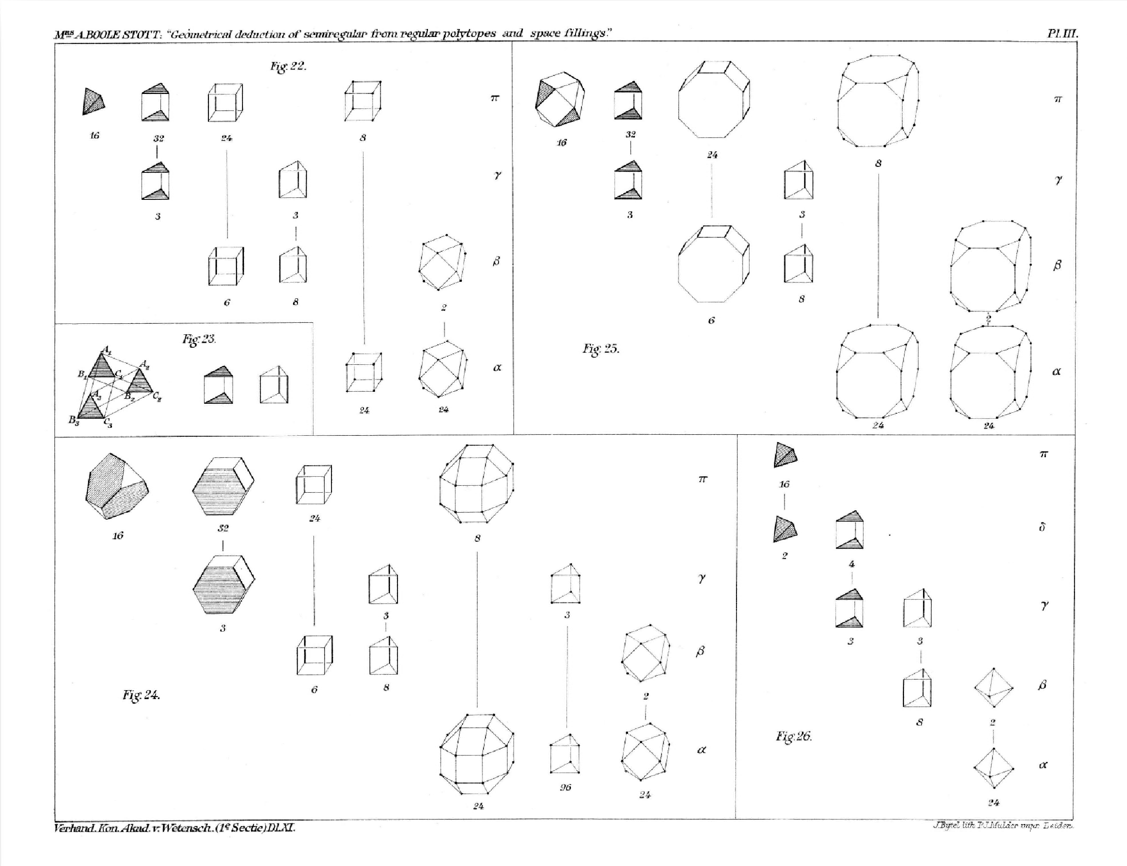


Figura 9

Dopo la morte di Schoute nel 1913, Boole Stott abbandonò gli studi per dedicarsi integralmente alla sua vita da casalinga, fino a quando suo nipote, il celebre fisico-matematico Geoffrey Taylor (1886-1975) non la presentò nel 1930 al giovanissimo geometra Harold Scott MacDonald Coxeter[104] (1907-2003), destinato a diventare un vero e proprio *personaggio* della geometria moderna.

L'incontro fu un vero e proprio ritorno di fiamma per l'ormai settantenne Alicia che trovò nel poco più che ventenne matematico un grandissimo stimolo

[104] Per un'approfondita biografia di Coxeter si rimanda al già citato testo [ROE], 2006

per rimettersi in corsa nella scoperta della visualizzazione della quarta dimensione. Ella diede al giovane una grandissima quantità di stimoli per intraprendere una luminosissima carriera di "iper-geometra euclideo" e nella redazione del suo libro *Regular polytopes* [105] che contiene anche numerosi dati della vita di Alicia Boole e, insieme al biografo Desmond McHale[106] costituisce la maggiore fonte di informazioni biografiche di un'Alicia, isolata dal mondo matematico del suo tempo, inizialmente poco conosciuta ma, forse proprio per questo motivo avvantaggiata nello sviluppare una capacità intuitiva che le permise di percepire la quarta dimensione utilizzando metodi non "convenzionali" di tipo analitico.[107]

[105] Donald Coxeter, [COX], 1948
[106] Desmond McHale, [McH], 1985
[107] Un'informatissima biografa di Alicia Boole Stott è Irene Polo-Blanco, ricercatrice dell'Università di Cantabria – Santander, autrice della tesi di dottorato [PoB2007] conseguito presso l'Università di Groningen nel maggio 2007. Dal capitolo 5 di questo lavoro sono state elaborate diverse informazioni riportate nella presente. Polo-Blanco è autrice anche di diversi articoli tra cui quello biografico: [PoB2008], 2008

8. La geometria tetradimensionale: aspetto divulgativo

Come si è visto, la esigenza di visualizzare l'iperspazio, nasce da precisi obiettivi scientifici ed epistemologici. A fianco di tali sforzi, e certamente stimolati da essi, nascono, nello stesso periodo, tendenze più propriamente divulgative, atte a portare al grande pubblico l'idea della quarta dimensione e legate talvolta a concezioni filosofiche, talvolta alquanto fumose, o alla parapsicologia, allora di gran moda. Noi ci limiteremo qui ad esaminare le tendenze più specificamente divulgative che hanno nel romanzo di Abbott, Flatland, il loro esito più famoso (e che per la sua notorietà sarà qui trattato solo di sfuggita), ma che, nell'ultimo quarto del XIX secolo, hanno molteplici risvolti interessanti da cui dovrebbe prendere le mosse un qualsiasi sforzo didattico in questa direzione. Non ci occuperemo invece né dei risvolti sulle interpretazioni iperspaziali di alcune manifestazioni paranormali (con l'eccezione del caso di Zöllner e della reazione di Klein, vista la sua importanza) né dei successivi e molto più importanti influssi sulle arti figurative.

Come abbiamo visto, nella prima metà degli anni '70 i matematici iniziano ad essere particolarmente impegnati nell'ambito di quella che possiamo definire come un'"alta divulgazione" dei risultati della geometria iperspaziale e delle sue conseguenze sul piano epistemologico. Di conseguenza, sarà nell'ultimo quarto del XIX secolo che cominceranno infatti ad apparire le prime manifestazioni divulgative degli iperspazi, come anche la loro trasposizione nei romanzi di fantascienza. Come già detto, questa apparizione è strettamente connessa con alcune riflessioni di fondo sul rapporto tra percezione soggettiva e "realtà" oggettiva rese necessarie soprattutto dall'affermarsi delle geometrie intrinseche e di quelle non euclidee e dalla necessità di effettuare modelli cognitivi credibili di tali geometrie.

La profondità di queste rivoluzioni geometriche determinò la loro inclusione in alcuni dei dibattiti scientifico-filosofici più importanti della fine del XIX e dell'inizio del XX secolo. Tra di loro i più importanti furono quelli sulla verità della scienza, il concetto di esistenza, scienza e realtà, l'esistenza di possibili dimensioni superiori, la struttura il funzionamento e l'importanza della matematica, il concetto di spazio e, soprattutto una domanda che si rese necessaria, ma anche evidente: il nostro spazio è euclideo o non-euclideo? O più semplicemente, che forma ha il nostro spazio?

Con la divulgazione della quarta dimensione giunse anche la diffusione di aspetti sorprendenti e anche magici. Si mostravano gli iper-esseri come onnipotenti e onnipresenti, capaci di attraversare pareti e realizzare tutti i tipi di fenomeni prodigiosi e questo diede il via al fatto che le dimensioni superiori entrassero in pieno nel mondo dello spiritualismo e, più in generale, delle superstizioni. Lo spazio tetradimensionale poteva essere visto come la realtà del mondo spirituale o soprannaturale. Per esempio in alcune opere cristiane si tentava di giustificare la credenza in Dio e nell'immortalità situando il nostro mondo visibile tridimensionale ed il mondo spirituale insieme nella quarta dimensione.

Ma la diffusione del tema della quarta dimensione a tutta la società arrivò nel 1877, con uno scandaloso processo che ebbe luogo a Londra e fu sotto i riflettori sia della stampa inglese sia della stampa internazionale. Si giudicava per frode Henry Slade, un medium americano, che effettuò alcune sedute spiritiche con persone di rilievo della società londinese. Ma lo scandalo aumentò quando eminenti scienziati di tutto il mondo (persino qualche futuro Premio Nobel per la fisica) si esposero in sua difesa, affermando che le sue sedute dimostravano che gli spiriti erano esseri della quarta dimensione.

Ma forse l'autore che, prima ancora della pubblicazione del romanzo di A. Abbott, aveva fortemente contribuito alla popolarizzazione degli iperspazi, era stato proprio Johann Karl Friedrich Zöllner[108] (1834–1882), stimato professore di astrofisica dell'università di Lipsia. Zöllner sentiva una forte tendenza verso la teosofia e la parapsicologia e cercò una verifica sperimentale dell'esistenza della quarta dimensione servendosi delle famose osservazioni di August Möbius circa il fatto che alcuni nodi, non scioglibili senza tagli nello spazio ordinario, lo erano invece facilmente in quello quadridimensionale.

Per questa pretesa dimostrazione egli effettuò vari esperimenti, in collaborazione con il ben noto fisico inglese William Crookes[109]. Ma per descrivere l'opera di Zöllner nell'ambito della quarta dimensione, ci sembra utile trascrivere, dalla traduzione curata da Robert Hermann, quanto ne dice Felix Klein che, in maniera alquanto inattesa, gli dedica molto spazio nella sua *Storia della matematica nel XIX secolo*[110]. Crediamo che una tale lettura possa dare un'idea più precisa dell'atmosfera, tra lo scientifico e l'occultismo, suscitato negli anni '70 dal primo apparire di una teoria matematica apparentemente tanto tecnica e astratta.

Scrive Klein[111], dopo aver lodato gli studi puramente scientifici di Zöllner:

---

[108] Su Zöllner: [IbT], 2010 e [RUK], 2011.

[109] Crookes è noto per aver scoperto l'elemento chimico denominato Tallio. Su di lui si può consultare http://scienzamateria.blog.tiscali.it/2013/11/03/william-crookes-nella-storia-della-scienza/

[110] Felix Klein, eccellente allievo di Plücker, ebbe contatti con tutto il mondo matematico europeo, soprattutto con la realtà francese e quella italiana. Su di lui si può consultare [MSW], 2002.

[111] Felix Klein, [KLE], 1979. La migliore disanima dei lavori e della personalità di Zöllner, che comprende anche un'interessante esposizione dei suoi contributi più propriamente scientifici, compresa l'uso notevole della geometria non euclidea di Riemann per problemi di astrofisica, è ora: Helge Kragh, [KRA], 2012, https://arxiv.org/ftp/arxiv/papers/1205/1205.4909.pdf. Sul lavoro di Zöllner in collaborazione con Crookes, Weber ed altri illustri fisici, si può anche consultare Michio Kaku, [KAK], 1994.

That Zöllner's talent for natural sciences was considerable is beyond question; but to it was joined a propensity for exalted mysticism and speculation, and this, in so powerful a personality, became is doom. Even inclined passionately to place himself on the side of free opinion suppressed or threatened by tradition or fashion, ever fantasizing, ever irritated by presumption or prejudice, he fell into the bog of spiritualism, where – one is not surprised – e was unscrupulously exploited. It may seem strange that it was I […] who gave the impetus to Zöllner's decisive turn to spiritualism. This was in the middle of 1870. […] I had rather incidentally given Zöllner a purely scientific account of results that I had found on knotted closed spaces-curves […] This result was that the presence of a knot can be considered an essential (i. e. invariant under deformations) property of a losed curve only if one is restricted to move in three-dimensional space; in four-dimensional space a closed curve can be unknotted by deformations. […] Zöllner took up this remark with an enthusiasm that was unintelligible to me. He thought that he had a means of experimentally proving the "existence of the fourth dimension" and proposed to Slade [un noto medium] *that the latter should try untyding knots of closed cords. Slade took up this suggestion […] and soon afterwards carried out the experiment […]. Zöllner had to press the sealed closing [of the cord] with both his thumbs while Slade put his hand over it. From this experiment Zöllner concluded that there were "mediums" who stand in a close*

> *relation to the fourth dimension and possess the power to move objects of our material word back and forth, so that – to our senses – they disappear and reappear!*

Klein conclude con una invettiva, che probabilmente è ancor oggi attuale:

> *here began the great popular mystification, which, in combination with hypnotism, suggestion, religious sectarianism, popular philosophy of nature, etc.. , soon came to dominate many minds. This domination lasted a long time, and even today its traces are found everywhere in vaudevilles, movies, and magic shows – and in colloquial speeches.*

Comunque, dice Klein, *in spite of all these misunderstandings, disputes and perplexities, n-dimensional space finally obtained its rights in the realm of scientific ideas*.

Anche se noi seguiremo il filo dei tentativi di visualizzazione e divulgazione dell'idea di spazio quadridimensionale nell'ambito scientifico, ci è sembrato utile un riferimento autorevole a Zöllner perché i suoi scritti ebbero un'indubbia influenza sui successivi sviluppi di tali tentativi. D'altra parte, anche nell'ambiente italiano si seguiva con molta ironia, e forse non poca apprensione, la *popular mystification* attivata dagli scritti di Zöllner[112].

Ad esempio Luigi Cremona scriveva ad Enrico Betti, nel maggio 1878:

> *Un bravo giovane di qui ha applicato la teoria della geom. a 4 dimensioni alla spiegazione di un miracolo di Gesù Cristo.*

[112] Tra gli scritti di Zöllner sugli iperspazi, citiamo Friedrich Zöllner, [ZOE1878a], 1878, pp. 227 – 237; (Il giornale era diretto da W. Crookes). Citiamo anche i volumi [ZOE1878b], 1878 e [ZOE1881], 1881 scritto l'anno prima della sua morte, in cui, non diversamente dall'allievo di Cremona citato un po' più avanti, *he explained the miracles of the Bible in terms of four-dimensional space* ([KRA], p. 17)

> *Come, dato un contorno piano chiuso, si può passare dall'esterno all'interno senz'attraversare l'orlo purché si viaggi fuori del piano nello spazio a tre dimensioni, così se una sfera (o altro involucro) è supposta collocata nello spazio a 4 dimensioni, viaggiando per questo si potrà passare dall'esterno all'interno, senza attraversare la superficie. Ora basta attribuire a G. C. la facoltà di viaggiare nello spazio a 4 dimensioni (nel quale sarebbe collocato il nostro a 3) per spiegare com'egli abbia potuto (dopo la resurrezione) comparire in mezzo agli Apostoli che stavano congregati in una camera chiusa senza passare per la porta né per la finestra. Ti comunico ciò per tenerti allegro. Collo stesso mezzo Zöllner spiega i prodigi dei medium americani! Comunica all'amico Teza questa Vierdimensionale Theorie dei miracoli.*[113]

Un altro degli argomenti che divennero molto popolari rispetto alla quarta dimensione fu l'intento di visualizzare oggetti tetradimensionali e Charles H. Hinton fu una delle persone che dedicò i maggiori sforzi a tale scopo, e attualmente lo si può considerare il massimo esponente di quella che si conosce come "*Filosofia dell'iperspazio*" una filosofia di tipo popolare che rifletteva sugli spazi di dimensioni superiori e la loro interazione con le altre materie.

Charles Howard Hinton (1853-1907), rappresenta un personaggio "fulcro" per la divulgazione delle idee che circolavano circa la geometria quadridimensionale. Concluse i suoi studi in matematica diplomandosi nel 1877, lo stesso anno in cui prese in moglie Mary Boole, sorella maggiore di Alicia e laureandosi nel 1886 a Oxford. Con Mary trascorse otto anni, i primi di felice

[113] Lettera di L. Cremona a E. Betti del 4 maggio 1878, in [GAT], 1996, pp. 7 – 90.

convivenza, ma sicuramente non si può affermare lo stesso del periodo intorno al 1885 quando sposò una tale Maude Wheldon. Per il fatto che non si preoccupò di divorziare dalla prima moglie, ebbe la condanna per bigamia. Successivamente decise di lasciare l'Inghilterra per trasferirsi in diversi Paesi prima di approdare negli Stati Uniti, dove continuò a scrivere soltanto dopo il 1902.

Hinton scrisse diversi articoli e romanzi-saggio a carattere scientifico, lungi dall'essere di tipo matematico. Decisamente si può affermare che fu uno dei primi scrittori fantascientifici, inventando nei suoi romanzi, mondi diversi in cui intervenivano esseri immersi in una realtà tetradimensionale.

Nel 1880 scrisse l'articolo *What Is the Fourth Dimension?* In cui immagina che i punti dello spazio tridimensionale possano rappresentare intersezioni tra oggetti quadridimensionali e lo spazio tridimensionale. Questa idea anticipava in qualche modo il concetto di *linea oraria* di Minkowski[114] Inoltre, nello stesso articolo, Hinton parla di quarta dimensione assimilabile alla grandezza temporale, un po' come è esposto nella teoria della relatività ristretta di Einstein.

Tra il 1884 ed il 1886 pubblica una serie di racconti a carattere scientifico.[115] In essi è presente in modo forse maniacale l'esigenza di inquadrare l'universo percepibile come immerso in uno a dimensione superiore. Egli credeva che lo sforzo compiuto per impadronirsi di quest'idea potesse avere un potenziale effetto innovativo su tutto l'insieme delle convinzioni individuali e collettive. Insomma, la quarta dimensione era per Hinton uno strumento per l'evoluzione totale del pensiero umano.

Tutta la sua trattazione era basata su un espediente comunicativo che comprendeva il linguaggio comune in modo che fosse alla portata di tutti, lontano dai tecnicismi del linguaggio matematico inaccessibile ai molti. Seguendo queste

[114] La linea oraria è una rappresentazione schematica del percorso che un oggetto compie nel cronotopo e può essere vista come la generalizzazione in uno spazio a quattro dimensioni (poiché è presente anche la coordinata temporale) del concetto di traiettoria di un corpo.

[115] Charles H. Hinton, [HIN1884a], 1884.

idee, e con lo scopo di diffonderle, egli rifiutò di utilizzare il tradizionale saggio scientifico o divulgativo, preferendo la forma del racconto scientifico, più appetibile dal lettore comune al quale si indirizzava. La sua esperienza di insegnante lo portò a rifuggire da formule matematiche e da argomentazioni troppo complesse, preferendo una esposizione per analogia, che egli utilizzò in modo massiccio e spesso incontrollato.

Nei suoi scritti Hinton afferma con assoluta certezza che

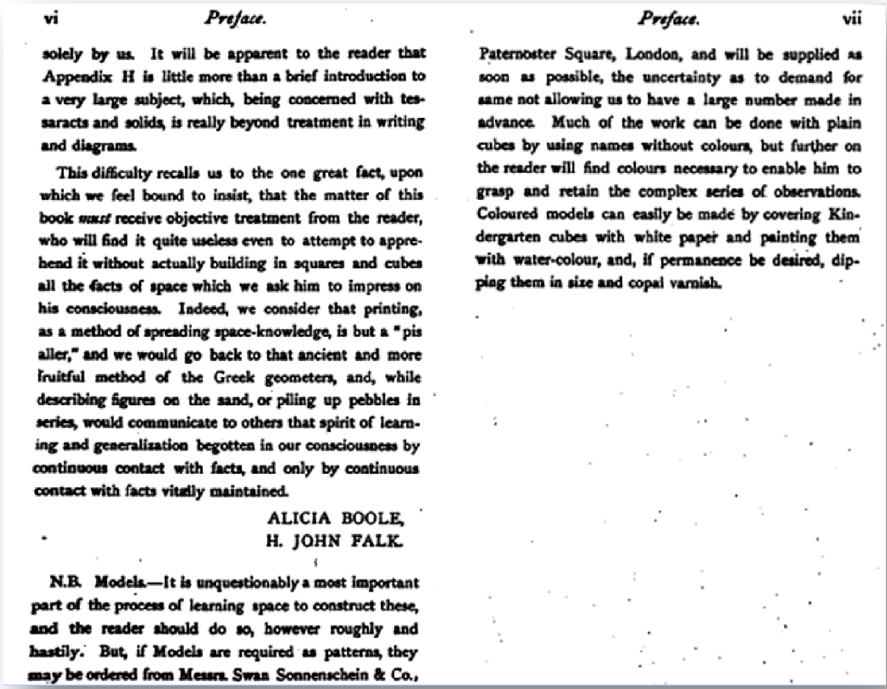
> *ciò che accade a Flatlandia agli esseri bidimensionali, accade anche a noi che non siamo in grado di percepire la quarta dimensione. I suoi parallelismi partono dalla descrizione di un mondo unidimensionale, una retta (1D), che viene divisa da un punto (0D) che appartiene ad essa in due parti. Se la retta congiunge ovest con est, una parte della retta sarà la parte ovest, l'altra la parte est. Se invece si ha a che fare con un piano bidimensionale (2D), esso sarà suddiviso da una retta (1D) che sta su di essa in due parti. Se il piano va da nord verso sud il piano sarà suddiviso in parte nord e parte sud. Se si ha un volume tridimensionale (3D) ed un piano (2D) lo seziona, esso viene diviso dal piano in due parti che chi sta sul piano chiamerà su e giù. Orbene, se si riuscisse ad immaginare un politopo quadridimensionale (4D) esso potrà contenere una figura tridimensionale (3D) che la seziona in due parti, e chi sta in quella sezione tridimensionale potrà distinguere un Anà ed un Katà.*

Successivamente prosegue:

> *Se si immagina un essere tridimensionale che riesce ad "attraversare" il mondo bidimensionale, il suo corpo apparirà agli abitanti del mondo bidimensionale come un insieme vario di figure piane sparse un po' qui e un po' là. Analogamente se un "angelo" quadridimensionale attraversasse il nostro mondo tridimensionale con il suo corpo, questo ci apparirebbe come un aggregato di pezzi di carne ricoperti di pelle, ballonzolanti qui e lì.*[116]

Una curiosa proprietà dello spazio 4D e che si possono collegare due punti interni a due corpi solidi 3D senza perforare le loro superfici: è sufficiente adottare l'accorgimento di effettuare movimenti *anà-katà* per entrare ed uscire dai corpi 3D. Se una persona si trovasse in una stanza cubica chiusa nella terza dimensione, potrebbe uscirne dirigendosi verso la quarta dimensione , (e questo equivarrebbe a smaterializzarsi dalla terza dimensione) andando verso *anà* o verso *katà*, e in seguito tornando nello spazio tridimensionale in un punto che si trova al di fuori della stanza.[117]

Nel 1888, poco dopo aver lasciato l'Inghilterra, Hinton aveva dato alle stampe



vi *Preface.*

solely by us. It will be apparent to the reader that Appendix H is little more than a brief introduction to a very large subject, which, being concerned with tessaracts and solids, is really beyond treatment in writing and diagrams.

This difficulty recalls us to the one great fact, upon which we feel bound to insist, that the matter of this book *must* receive objective treatment from the reader, who will find it quite useless even to attempt to apprehend it without actually building in squares and cubes all the facts of space which we ask him to impress on his consciousness. Indeed, we consider that printing, as a method of spreading space-knowledge, is but a "pis aller," and we would go back to that ancient and more fruitful method of the Greek geometers, and, while describing figures on the sand, or piling up pebbles in series, would communicate to others that spirit of learning and generalization begotten in our consciousness by continuous contact with facts, and only by continuous contact with facts vitally maintained.

ALICIA BOOLE,
H. JOHN FALK.

N.B. Models.—It is unquestionably a most important part of the process of learning space to construct these, and the reader should do so, however roughly and hastily. But, if Models are required as patterns, they may be ordered from Messrs. Swan Sonnenschein & Co.,

Preface. vii

Paternoster Square, London, and will be supplied as soon as possible, the uncertainty as to demand for same not allowing us to have a large number made in advance. Much of the work can be done with plain cubes by using names without colours, but further on the reader will find colours necessary to enable him to grasp and retain the complex series of observations. Coloured models can easily be made by covering Kindergarten cubes with white paper and painting them with water-colour, and, if permanence be desired, dipping them in size and copal varnish.

[116] La prima volta che Hinton parla di *Anà* e *Katà* è in [HIN1884b], 1884
[117] Rudy Rucker in [RUK], 2011

presso il suo editore londinese *A New Era of Thought,* opera profondamente rimaneggiata in fase redazionale su sua esplicita richiesta, perché egli "doveva partire per un impegno importante che l'avrebbe tenuto lontano a lungo, forse per sempre". Il testo, la cui prefazione portava la firma di Alicia Boole, si pensa che fu scritto abbondantemente prima della data di pubblicazione.

In realtà era già iniziato il suo volontario esilio (o fuga: in quegli anni sposò la sua seconda moglie). Il libro è suddiviso in due parti. La prima è una collezione piuttosto disorganica di saggi matematici e filosofici sulla quarta dimensione che trattano del pensiero quadrimensionale e delle implicazioni filosofiche e religiose di tale nuova acquisizione del pensiero. Nella seconda parte Hinton sviluppa una serie di cubi colorati, che servono da metodo per sviluppare una percezione quadridimensionale sulla base di un progressivo allenamento.

Viene anche mostrato come visualizzare il *tesseract*, termine coniato dallo stesso Hinton, cioè l'ipercubo, con l'osservazione di un certo numero di sue sezioni tridimensionali.

I lettori di *A New Era of Thought* potevano avere, su richiesta all'editore, un set di cubi, ciascuno colorato in maniera diversa dagli altri e ciascuno con un proprio nome. Seguendo le istruzioni contenute nel libro, chi aspirava a una visione "superiore" doveva svolgere una serie di esercizi sempre più complicati. Da principio bisognava semplicemente creare blocchi di cubi impilati uno sull'altro, e spostarli sottosopra o ruotarli; poi le operazioni divenivano sempre più difficili e andavano compiute per lo più mentalmente. Il neofita doveva imparare a memorizzare i singoli costituenti del blocco (ricordarne bene colore, nome, posizione) e riuscire a immaginarne lo spostamento nello spazio, curando che al movimento di ogni cubo si spostasse in maniera congruente tutto il complesso degli altri. Ciò si poteva fare, sosteneva Hinton, se si cercava di "immedesimarsi" con quei cubi, di identificarsi con essi, di sentirli quasi espansioni del proprio corpo e addirittura centro della propria coscienza.

Naturalmente il primo vero passo in direzione di una popolarizzazione della problematica relativa alla quarta dimensione fu la pubblicazione quasi contemporanea ai lavori di Hinton, del famoso testo di Edwin Abbott, Flatlandia. Non ci soffermeremo su tale, notissimo testo, ancor oggi di grande attualità; vogliamo solo sottolineare come questo libro riscuotesse subito l'interesse di quanti, anche nell'ambito dei matematici più direttamente impegnati, ritenevano assolutamente necessaria la possibilità di una intuizione degli iperspazi.

L'incipit del romanzo è diretto:

> *Immaginate un vasto foglio di carta su cui delle Linee Rette, dei Triangoli, dei Quadrati, dei Pentagoni, degli Esagoni e altre Figure geometriche, invece di restar ferme al loro posto si muovano qua e là, liberamente, sulla superficie o dentro di essa, ma senza potersene sollevare e senza potersene immergere, come delle ombre insomma – consistenti però, e dai contorni luminosi.*[118]

Possiamo osservare come la prima parola usata in questo periodo sia immaginiamo. Come si è visto questa è la parola chiave usata da tutti, matematici o divulgatori che siano, per mettere a fuoco la nuova matematica, che pure era interamente basata su calcoli astratti e apparentemente aridi. Non può inoltre non colpire la stretta analogia tra l'immagine usata da Abbott e quella di Hinton. Naturalmente occorre sottolineare che, a differenza dei racconti di Hinton, il romanzo di Abbott è, per l'appunto un vero romanzo, non solo un'avventura matematica, ma un excursus della società vittoriana, con le sue divisioni in classi, con lo status della donna, ecc. Questo mix tra romanzo vittoriano e divulgazione

[118] Edwin A. Abbott, [ABBb], 1966.

geometrica può spiegare l'impetuoso successo, che dura a tutt'oggi, di questo piccolo capolavoro.

Va però sottolineato che, in contraddizione con quanto normalmente creduto, il successo fu soprattutto negli Stati Uniti dove si sono avute numerose ristampe e in Olanda dove la prima traduzione è del 1886, mentre in Gran Bretagna, dopo la prima ristampa occorrerà attendere fino al 1926 per vedere apparire una nuova edizione.

Comunque è un inglese colui che appare il primo matematico di professione a manifestare profondo interesse per questo romanzo. È proprio James Sylvester, che abbiamo visto profondamente interessato alle problematiche divulgative.

Così, il 2 novembre 1884, cioè subito dopo la pubblicazione di Flatlandia, Sylvester scriveva a Cayley:

> *I recommended to my hearers to procure Flatland (by Abbott of the City of London school) in order to obtain a general notion of the doctrine of space of n dimensions*[119]*.*

Questa frase può essere vista come significativa del profondo legame esistente tutt'ora tra la ricerca matematica e gli aspetti didattici e divulgativi.

[119] Lettera di Sylvester a Cayley del 4 novembre 1884, in Karen H. Parshall, [PAR], 1998.

9. Possibili applicazioni alla didattica in classe

Con il nuovo secolo gli iperspazi hanno occupato un posto stabile nella matematica. Ne fa anche prova l'apparire dei primi testi matematicamente solidi riferentesi in modo completo e dettagliato alla quarta dimensione. Citiamo in particolare quelli di Jouffret[120] e di Manning[121].

Un "ispiratore" delle nuove frontiere che si sono aperte nel mondo della fisica del ventesimo secolo è stato Jules-Henri Poincaré[122]. Nel suo *La science et l'hypothèse* (1902) così egli spiega la percezione che l'uomo ha dello spazio tridimensionale:

> *Quelles sont d'abord les propriétés de l'espace proprement dit? Je veux dire celui qui fait l'objet de la géométrie et que j'appellerai l'espace géométrique. Voici quelques-unes des plus essentielles:*
>
> 1. *Il est continu;*
> 2. *Il est infini;*
> 3. *Il a trois dimensions;*
> 4. *Il est homogène, c'est-à-dire que tous ses points sont identiques entre eux; [...]* [123]

Poincaré non mette minimamente in dubbio che la realtà esistente sia solamente tridimensionale, ma apre un capitolo nuovo nel momento in cui scrive dello *spazio visivo*. Egli afferma che ciò che noi percepiamo è uno spazio tridimensionale ma il modo in cui riusciamo a rilevare tale tridimensionalità

[120] Esprit Jouffret, [JOU], 1906
[121] Henry Parker Manning, [MAN1910], 1910; [MAN1914], 1914
[122] Su Poincaré ha scritto un interessante storia il giornalista scientifico George G. Szpiro, [SZP], 2008
[123] Henry-Jules Poincaré, [POI1902], 1902

dipende solamente da come l'essere umano è fatto. Infatti l'immagine che si forma nei nostri organi recettori, la retina, è un'immagine bidimensionale e noi riusciamo a percepire la terza dimensione solamente grazie al fatto che si sovrappongono due immagini bidimensionali ed il nostro cervello somma l'effetto le due immagini che si formano:

> *Considérons d'abord une impression purement visuelle, due à une image qui se forme sur le fond de la rétine. Une analyse sommaire nous montre cette image comme continue, mais comme possédant seulement deux dimensions, cela distingue déjà de l'espace géométrique ce que l'on peut appeler l'espace visuel pur.*[124]

Poincaré si pone il problema di ciò che è la realtà e ciò che l'essere umano percepisce. Descrive le sensazioni che ci permettono di percepire le tre dimensioni a partire da immagini bidimensionali e, al termine delle sue argomentazioni si apre a considerazioni possibiliste:

> *[...] Rien n'empêche de supposer qu'un être ayant l'esprit fait comme nous, ayant les mêmes organes des sens que nous, soit placé dans un monde où la lumière ne lui parviendrait qu'après avoir traversé des milieux réfringents de forme compliquée. Les deux indications qui nous servent à apprécier les distances, cesseraient d'être liées par une relation constante. Un être qui ferait dans un pareil monde l'éducation de ses sens, attribuerait sans doute quatre dimensions à l'espace visuel complet.*[125]

[124] Ivi
[125] Ivi

Mentre la ricerca matematica sulla geometria a più di tre ordinarie dimensioni ha portato frutti tangibili nel mondo della scienza fisica, basti pensare alla formulazione della teoria della relatività del 1904, il romanzo di Abbott e le altre forme di diffusione del pensiero geometrico hanno ispirato tantissimo l'immaginario collettivo e quello di scrittori ed artisti del XX secolo.

La teoria della relatività di Einstein si basa sul concetto che la geometria che descrive la realtà non è quella euclidea e nella descrizione della realtà bisogna fare conto di una quarta dimensione, il tempo, non omogenea con le tre spaziali.

Negli ultimi anni i fisici hanno cominciato a parlare di configurazioni che coinvolgono 10, 11 o 26 dimensioni[126], mentre i matematici ormai parlano con disinvoltura di strutture in spazi *n*-dimensionali. Uno dei modi più comuni di pensare alle dimensioni è di considerarle come ciò che i fisici o gli ingegneri chiamano "gradi di libertà".

L'idea di dimensione adesso, è legata al fatto che esse possono essere espresse come elenco di numeri che rappresentano in qualche modo le coordinate necessarie per descrivere la posizione e lo stato di un sistema. Per definire la posizione di un punto nello spazio ordinario sono sufficienti tre coordinate che individuano il punto nel sistema di riferimento tridimensionale in modo univoco.

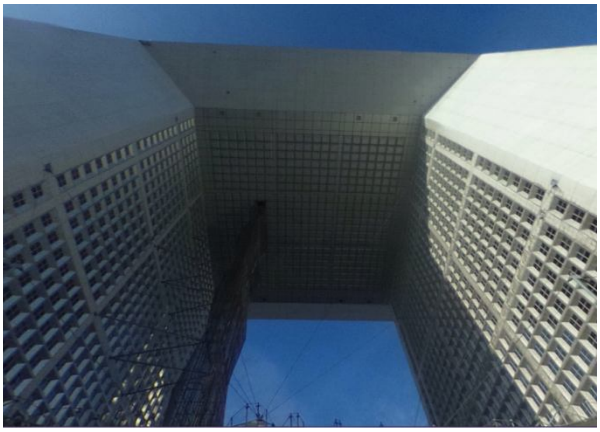
In uno spazio a *n* dimensioni un punto si identifica con *n* coordinate. Se si volesse identificare un'altra caratteristica presente nel punto assegnato, per esempio la temperatura di esso, basta aggiungere un'altra coordinata numerica che determina la temperatura del punto. Se si volesse invece aggiungere al punto una caratteristica vettoriale, si deve aggiungere alle *n* coordinate spaziali che determinano il punto, un numero di coordinate pari al numero di dimensioni, cioè

[126] Warren Siegel, [SIE], 2008. Si consulti anche http://www.cosediscienza.it/metodo/05_teorie.htm

proprio *n*. Quindi per identificare un vettore *n*-dimensionale in un punto in uno spazio *n*-dimensionale è necessario usare *2n* coordinate.

Se quindi vogliamo rappresentare un campo elettrico nell'intorno di una carica elettrica in no spazio tridimensionale è necessario usare 6 coordinate per ogni punto di quell'intorno, e se tale campo elettrico dovesse dipendere anche dalla temperatura presente punto per punto, si dovranno usare 7 coordinate e potremmo dire che il sistema è un sistema a 7 dimensioni.

Per ciò che riguarda l'aspetto divulgativo nel XX secolo, si ha assistito ad un vero e proprio boom della quarta dimensione un po' in tutti i campi: in primo luogo nella rappresentazione grafica da parte degli artisti. Il movimento cubista si proponeva infatti di rappresentare i soggetti fonte di ispirazione in modo che fossero riproposti sotto 4 punti di vista differenti contemporaneamente. Anche nel campo dell'architettura si è fatta una ricerca per poter esprimere forme che richiamassero sviluppi di solidi iperdimensionali: un esempio è quello de "La grande Arche de la Défense" a Parigi.



Nel campo del cinema si contano innumerevoli tentativi che sono stati fatti per ricreare situazioni e luoghi che si sviluppano nella quarta dimensione. Film come *The Cube*, o *Matrix* di recente produzione, si sforzano di fare in qualche modo vivere un'esperienza che si potrebbe provare in una realtà a più dimensioni.

Tanti sono stati gli sforzi che l'uomo ha prodotto per poter immaginare e rappresentare la realtà a quattro dimensioni, e anche dal punto di vista geometrico si sono raggiunti grandi risultati con la "*Computer Graphics*". Essa

> *non è che l'ultima di una serie di invenzioni che hanno reso possibile l'esplorazione di campi prima inaccessibili. [...] Grazie agli straordinari progressi della computer graphics, oggi possiamo avere una diretta esperienza visiva di oggetti che esistono solo in dimensioni superiori. Quando osserviamo queste immagini muoversi sullo schermo di un computer grafico, la sfida che ci viene lanciata è simile a quella che dovettero sostenere i primi scienziati che lavorarono con un telescopio, con un microscopio o con i raggi X. Stiamo vedendo cose che non erano mai state viste prima d'ora, e stiamo appena cominciando a imparare come devono essere interpretate queste immagini. Siamo davvero solo nella primissima fase di una nuova era, l'era della visualizzazione delle dimensioni.*[127]

Tutto ciò che Alicia Boole Stott ed i suoi successori si erano sforzati di fare usando una matita ed un foglio di carta, o con fogli di cartoncino, adesso lo si può fare unendo le conoscenze algebriche con le costruzioni geometriche calcolando miliardi di coordinate in tempuscoli minimi con l'ausilio dei processori elettronici. Come afferma uno dei più grandi esperti mondiali di computer graphics, il professor Thomas Francis Banchoff, su uno schermo di un elaboratore elettronico si possono osservare le vere immagini che rappresentano ciò che potremmo percepire se potessimo entrare negli spazi a dimensioni superiori.

[127] Thomas F. Banchoff, [BAN], 1997

Su questa tematica gli studi attuali sono numerosissimi e tutti fanno un uso di concetti matematici più o meno avanzati. Per una ampia illustrazione e una vasta bibliografia facciamo riferimento al citato testo di Tony Robbin[128] e al sito di Banchoff, www.tombanchoff.com

Una premessa

Per poter parlare in un'aula di allievi di scuola secondaria di spazi quadridimensionali, ritengo sia necessario dare uno spunto visivo a ciò che può essere trattato analiticamente. Le figure tetradimensionali non è possibile vederle nella realtà, ma sicuramente, come abbiamo già visto, con un certo sforzo e con opportune spiegazioni, tanti sono stati gli sforzi e gli obiettivi raggiunti per mostrare cosa può accadere in uno spazio tetradimensionale. Oggi la "computer graphics" permette di vedere immagini in movimento che rappresentano politopi di diverso tipo, ma la mia proposta si basa sull'utilizzo di un software di geometria dinamica alla portata di tutti gli allievi, in particolare coloro i quali hanno nel proprio curriculum didattico lo studio del disegno tecnico.

Si immagini di voler rappresentare su un piano bidimensionale un oggetto tridimensionale. Per fare questo si fa uso della tecnica della prospettiva, tecnica pittorica che permetta di ricreare l'illusione ottica della profondità anche quando un oggetto viene rappresentato su un piano bidimensionale.

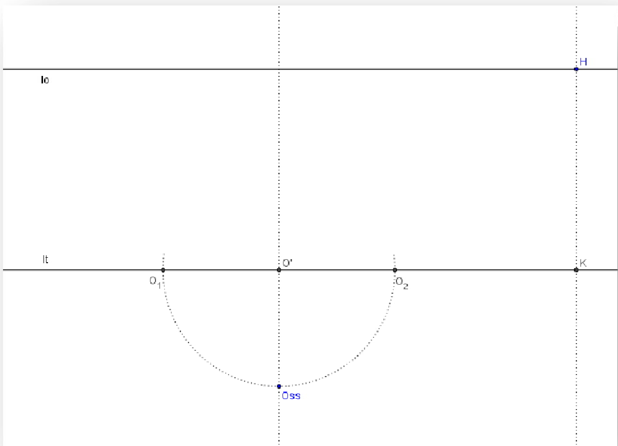
Questa tecnica, oggi, fa uso dell'omologia, una trasformazione geometrica che trasforma una figura in un'altra secondo certi criteri che illustriamo in seguito. Una prima opera che tratta della tecnica della prospettiva è quella di Leon Battista Alberti, il "De pictura" risalente al 1432. In una data nel ventennio tra il 1460 ed il 1482, il pittore-geometra Piero della Francesca descrive in un trattato le regole geometriche che consentono di realizzare l'illusione della terza dimensione in una rappresentazione grafica bidimensionale. Egli così propone l'argomento:

[128] Antony Robbin, [ROB], 2006

Dico che la prospectiva sona nel nome suo commo dire cose vedute da lungi, rapresentate socto certi dati termini con proportione, secondo la quantità de le distantie loro, senza de la quale non se po alcuna cosa degradare giustamente. Et perchè la pictura non è se non dimostrationi de superficie et de corpi degradati o acresciuti nel termine, posti secondo che le cose vere vedute da l'occhio socto diversi angoli s'apresentano nel dicto termine, et però che d'onni quantità una parte è sempre a l'ochio più propinqua che l'altra, et la più propinqua s'apresenta sempre socto magiore angolo che la più remota nei termini assegnati, et non posendo giudicare da sè lo intellecto la loro mesura, cioè quanto sia la più propinqua et quanto sia la più remota, però dico essere necessaria la prospectiva, la quale discerne tucte le quantità proportionalmente commo vera scientia, dimostrando il degradare et acrescere de onni quantità per forza de linee.[129]

La proposta didattica

L'attuazione di tale tecnica non è altro che l'applicazione dell'omologia in riferimento a dei punti ben precisi che rappresentano i cosiddetti "punti di fuga", punti in cui convergono tutte le linee parallele ad una direzione.



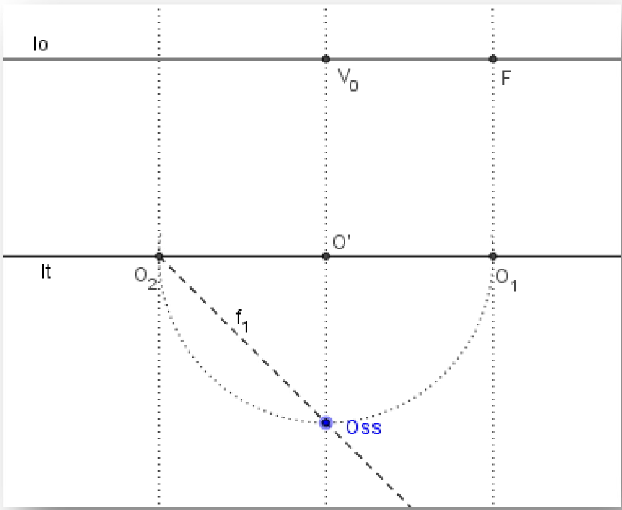
Per la rappresentazione prospettica è necessario inizialmente suddividere il piano in due semipiani

[129] Piero della Francesca, De perspectiva pingendi, (1479-1482?)

con una retta denominata "linea di terra" (lt). Tutti i punti di tale linea appartengono sia all'immagine da trasformare sia a quella già trasformata, sono punti, cioè, che si trasformano in sé stessi.

Nel semipiano superiore (il semipiano delle trasformate, st) andrà rappresentata l'immagine prospettica, in quello inferiore (il semipiano di pianta sp), la figura da rappresentare vista dall'*alto* (la cosiddetta "pianta" dell'immagine). Inoltre nel semipiano superiore resteranno invariate tutte le misure dell'immagine reale che si trovano sulla linea di terra, pertanto sarà usato anche per riportare le linee presenti nella terza dimensione.

Nel semipiano superiore, quello della rappresentazione si deve disegnare la cosiddetta "linea di orizzonte" (lo), una retta parallela alla lt alla distanza KH che rappresenta la quota a cui si trovano gli occhi dell'osservatore mentre nel semipiano della pianta si deve disegnare il punto Oss che rappresenta il punto (in pianta) in cui si trova l'osservatore. Questo servirà a determinare la posizione dei punti di fuga sulla lo.

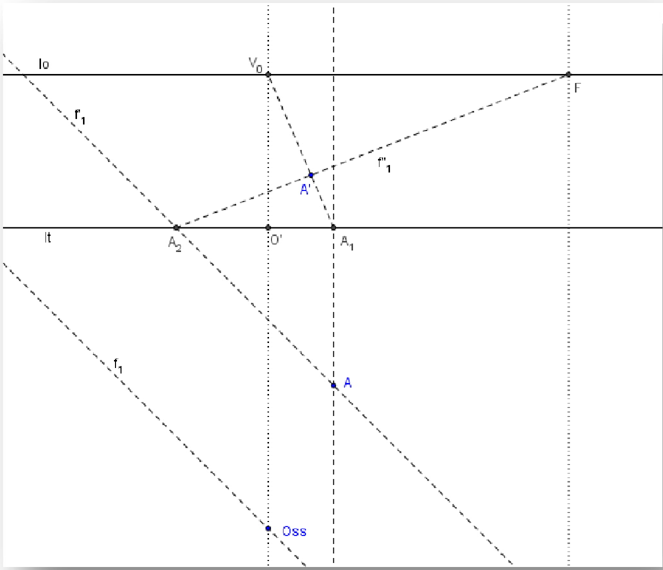


Per la determinazione dei punti di fuga si devono definire due punti O_1 e O_2 sulla lt in modo che si trovino alla stessa distanza di Oss dal piede O'. Proiettando ortogonalmente il punto O_1 su lo si trova il punto F che rappresenta il punto di fuga verso cui convergeranno tutte le rette parallele alla direzione $Oss \to O_2$.

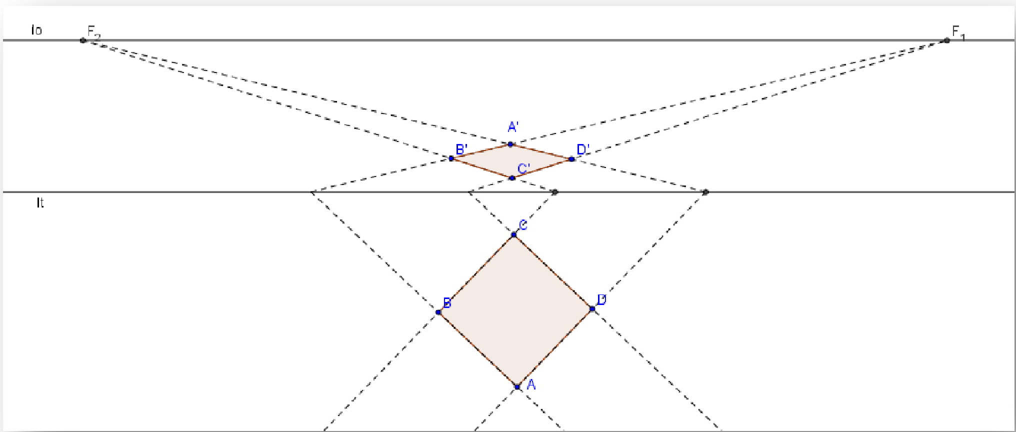
Inoltre se si proietta il punto Oss sulla lo si ottiene il "punto di vista" V_0 che rappresenta il punto in cui fugano tutte le rette del sp perpendicolari alla lt.

Rappresentazione di una figura bidimensionale

Per rappresentare un punto A di sp nel st bisognerà tenere conto che tale punto è intersezione di due rette (f'_1 e A_1A, quest'ultima perpendicolare a lt) con f'_1 parallela alla direzione f_1 che abbiamo adottato precedentemente e che le due rette f'_1 e A_1A intersecano la lt nei punti A_2 e A_1 che si trasformano in sé stessi. Per rappresentare la retta f'_1 nella sua trasformata f''_1 è sufficiente congiungere i punti A_2 e F mentre per disegnare la trasformata di A_1A si può congiungere A_1 con V_0. Il punto A' trasformato di A si trova all'intersezione delle due rette appena disegnate.

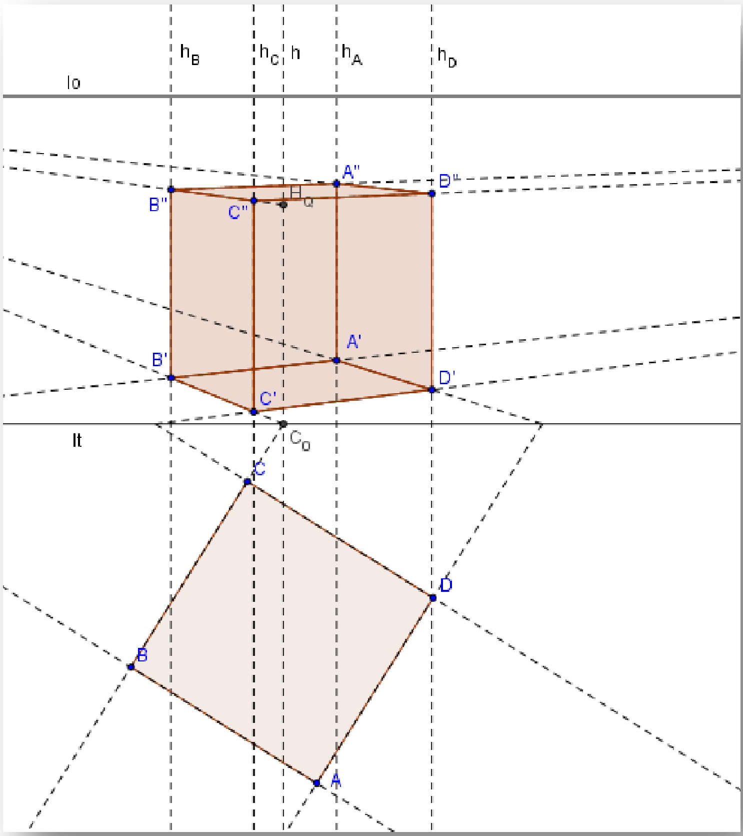


Per disegnare più di un punto basta seguire questa procedura più volte e si può trasformare un poligono in un altro che ne è l'immagine prospettica. Per esempio il quadrato $ABCD$ si trasforma nel quadrato $A'B'C'D'$:



Rappresentazione della terza dimensione.

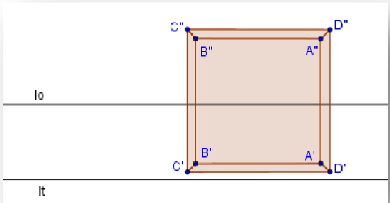
Si vuole rappresentare un cubo di base $ABCD$. Normalmente, un comune manuale di disegno tecnico riporta la rappresentazione della terza dimensione nel modo seguente: prolungando uno dei lati del quadrato di pianta (per esempio BC) si interseca la lt in un punto C_0 dal quale si può disegnare la perpendicolare h a lt e su h si stacca il segmento C_0H_Q di lunghezza pari al lato del cubo. Posto che le

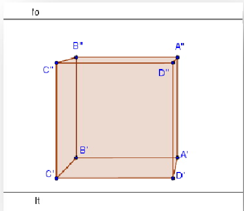


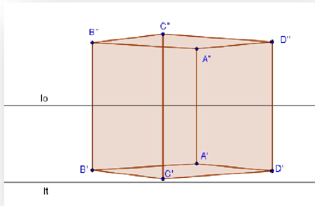
rette parallele alla terza dimensione sono rappresentate da immagini tutte parallele, le rette h_A, h_B, h_C e h_D parallele ad h conterranno gli spigoli del cubo appartenenti alla terza dimensione. Fugando il punto H_Q con il punto di fuga in cui convergono tutte le parallele al lato BC si ottiene una retta “parallela” alla retta $B'C'$ che intersecherà h_C e h_B nei vertici del cubo C'' e B''. Fugando questi due vertici con il punto di fuga in cui convergono i lati BA e CD si ottengono i vertici A''

e D''. Congiungendo opportunamente tutti i vertici di rappresenta il cubo nel seguente modo:

L'immagine che il nostro occhio percepisce è un cubo tridimensionale anche se in realtà si e disegnato su un piano (bidimensionale) l'esagono irregolare $A''B''B'C'D'D''$. "Spostando" il cubo in modo che la faccia *ABCD* appartenga al *sp* si ottengono diverse viste tridimensionali del cubo:







È superfluo rappresentarne altre e, come si può facilmente immaginare, è possibile trovare infinite viste tutte diverse l'una dall'altra che rappresentino lo stesso cubo. Ogni vista sarà comunque sempre una figura differente dal cubo vero e proprio, perché ne rappresenta una proiezione su un piano a dimensione 2.

Rappresentazione della quarta dimensione.

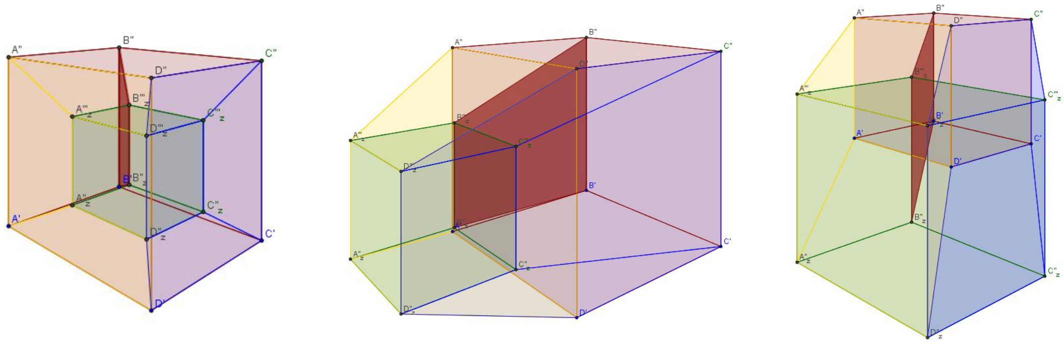
Come visto la rappresentazione prospettica è un'illusione ottica che permette la "visualizzazione" della terza dimensione in un piano bidimensionale. Tale illusione è di tipo spontaneo ed il cervello umano riesce automaticamente a "trasformare" il concetto di esagono (o un quadrato o un pentagono) in quello più complesso di cubo.

Utilizzando la stessa tecnica è possibile cercare di dare una rappresentazione grafica di un iperottaedro o, più in generale, di figure quadridimensionali.

L'idea di rappresentare graficamente una figura quadridimensionale può essere un grande stimolo per gli studenti che affrontano la geometria solida, soprattutto se si è posto il problema dell'esistenza o meno di uno spazio quadridimensionale.

Per la rappresentazione grafica prospettica dobbiamo tenere conto che osservando dalla quarta dimensione due cubi perimetrali dell'ipercubo, essi presenteranno i lati paralleli tra loro, e quindi sul piano di proiezione gli spigoli di ciascuno dei cubi perimetrali fugheranno verso gli stessi due punti di fuga sulla stessa linea di orizzonte. Si dovranno quindi disegnare otto cubi che dovranno essere visualizzati con 8 spigoli perpendicolari alla lt, 8 spigoli che fugano verso un punto di fuga F_1 sulla lo, altri 8 che fugano verso il punto di fuga F_2 sulla lo e, come si può facilmente verificare i restanti 8 che fugano verso l'altro punto di fuga legato alla quarta direzione dimensionale. Gli spigoli dovranno unire a due a due i vertici in modo che da ogni vertice si diramino 4 spigoli.[130]

Di seguito si propongono tre viste prospettiche diverse dello stesso politopo:



[130] Una costruzione dettagliata dell'immagine prospettica dell'ipercubo con il software geogebra è proposta nell'Appendice III.

Appendice I

SULL'INTEGRALE MULTIPLO $\int^n dxdy...dz$, I CUI ESTREMI SONO

$$p_1 = a_1 x + b_1 y + ... + h_1 z > 0, \quad p_2 > 0, \ ... \ p_n > 0, \text{ E } x^2 + y^2 + ... + z^2 < 1.$$

Dr. SCHLAEFLI, Professore di Matematica all'Università di Berna

SEZIONE I.

Limitato soltanto dall'ultima diseguaglianza, questo integrale (che per $n = 2,\ 3$ rappresenta l'area di un cerchio o il volume di una sfera con raggio 1) è stato, tempo fa, verificato corrispondere a: $\pi^{\frac{n}{2}} : \Gamma\left(\frac{n}{2}+1\right)$.*

Non so, però, se finora la generalizzazione similare dell'integrale che rappresenta il settore di un cerchio o un settore sferico con base triangolare sia stata trattata. A questo scopo, devono essere forniti *n* vincoli della forma lineare e omogenea $p > 0$. Poiché se il numero di tali vincoli fosse minore di *n,* l'integrale potrebbe essere facilmente ridotto ad un numero di integrazioni pari a quello dei vincoli lineari dati; e se ci fossero più di *n* di tali vincoli, l'integrale potrebbe essere risolto in un numero di altri integrali, ognuno con *n* tali vincoli. Di conseguenza, focalizzeremo la nostra attenzione principalmente sull'integrale con *n* vincoli lineari.

E' bene dare una breve presentazione delle sue proprietà.

1. Il numero di integrazioni che devono essere effettuate può essere ridotta a $\frac{n}{2}$ o a $\frac{n-1}{2}$, a seconda che *n* sia pari o dispari.

* Consulta un articolo di M. Catalan pubblicato nel Liouville's Journal, t. VI. p. 81, dove si riferisce a t. IV. p. 336

2. Il numero di elementi indipendenti, in funzione dei quali va calcolato il valore dell'integrale finito, è $\frac{n(n-1)}{2}$; poiché se

$$p = ax + by + ... > 0 \, , \; p' = a'x + b'y + ... > 0$$

dove siano $a^2 + b^2 + ... = 1$, $a'^2 + b'^2 + ... = 1$, due dei qualsiasi vincoli assegnati, possiamo definire $aa' + bb' + ...$ come uno di questi elementi. E, inoltre, l'integrale in questione può, in *n* modi diversi, essere diviso in $1,2,3...(n-1)$ funzioni simili tali che ciascuna ha solo $(n-1)$ elementi connessi da relazioni algebriche a quelli della funzione proposta, mentre le rimanenti sono uguali a zero.

3. Per ogni valore di *n* maggiore di 2, c'è un determinato numero di casi in cui questa funzione diventa allo stesso tempo una parte *razionale* dell'integrale totale $\pi^{\frac{n}{2}} : \Gamma\left(\frac{n}{2}+1\right)$, mentre ciascuno dei suoi $(n-1)$ elementi è il coseno di una parte *razionale* di π. Da questo punto di vista al numero $n = 4$ corrisponde il più grande numero di casi possibili; e per dare al lettore un'idea iniziale dell'argomento, posso menzionare che l'integrale totale $\int^n dwdxdydz \quad \left(w^2 + x^2 + y^2 + z^2 < 1\right) = \frac{1}{2}\pi^2$ può essere diviso in 14400 parti *sovrapponibili* tramite vincoli lineari e omogenei. La parola "sovrapponibile" implica il concetto di sostituzioni lineari e omogenee tali che la forma della somma dei quadrati delle quattro variabili rimane invariata, mentre l'effetto di queste sostituzioni consiste nel portare due qualsiasi di quelle parti ad una completa coincidenza formale. E' facile capire che per $n = 3$ i poliedri regolari ricadono entro questo punto di vista.

SEZIONE II.

Abbiamo bisogno di alcune definizioni preliminari.

Data un'equazione o un qualsiasi numero di equazioni inferiore al numero delle variabili, chiamiamo *soluzione* qualsiasi serie di valori delle variabili che soddisfa il sistema di equazioni; e se concepiamo tutte queste soluzioni nel loro insieme, a patto che il sistema non determini i valori delle variabili, avremo l'idea di un *continuum,* in cui ogni soluzione è circondata da vicino da altre soluzioni, in maniera tale che possiamo passare in modo continuo da una soluzione ad un'altra distinta da questa passando attraverso altre soluzioni. Un così fatto insieme di soluzioni forma un *continuum semplice* che possiamo anche chiamare *curva*, mentre d'altra parte l'intero continuum viene chiamato *m*-esimo quando il numero di variabili eccede di *m* il numero delle equazioni. Ma potremmo anche, astraendoci da qualsiasi condizione specifica, riassumere in un unico concetto tutte gli insiemi di valori delle variabili, e quindi, andando contro la pratica comune, continuare ad usare il termine *soluzione*. E l'insieme di queste soluzioni non soggette a qualsivoglia condizione, avendo in esame *n* variabili, potrebbe quindi essere chiamata la *varietà n-esima*.* Di conseguenza, una singola soluzione e la varietà sono le estremità di una fila, negli stadi intermedi della quale spaziano i differenti tipi di *continua*, a seconda che siano rappresentati da 1 o 2 o 3, o $(n-1)$ equazioni.

Useremo anche il termine *coordinate* al posto dell'ingombrante "valori delle variabili che appartengono a qualche soluzione".

Poiché due soluzioni possono discostarsi di più o di meno l'una dall'altra, e poiché la serie di differenze tra le coordinate con lo stesso nome, che cambia con ogni trasformazione lineare, non ci dà un'idea giusta e coerente della deviazione che è di per sé una singola cosa, possiamo affermare che la radice quadrata di una funzione quadratica e omogenea di quelle differenze, tale che non scompare per valori reali di queste, rappresenterà la deviazione o *distanza* tra le due soluzioni. Poiché, di nuovo, con l'aiuto di sostituzioni reali e lineari, una tale funzione

* La varietà n-esima non è altro che uno spazio di *n* dimensioni, una soluzione è un punto in tale spazio, e i continua intermedi di 1, 2, ... o $(n-1)$ equazioni sono i luoghi che in un siffatto spazio corrispondono alle superfici e alle curve nello spazio tridimensionale ordinario. - A.C.

quadratica può sempre essere trasformata in una somma dei quadrati delle differenze delle coordinate, distingueremo un qualsiasi tipo di sistema di coordinate nel quale si verifica questa espressione molto semplice della *distanza* da qualsiasi altro in cui ciò non avviene, chiamando il primo *sistema di coordinate ortogonali*. Di conseguenza, ogni sistema di sostituzioni lineari per le differenze delle coordinate ortogonali, che non interferisce con la sopracitata condizione di ortogonalità, può essere chiamato *trasformazione ortogonale*. La matrice dei coefficienti di sostituzione, ha le seguenti ben note proprietà; 1. che il suo determinante è in valore assoluto uguale all'unità, aggiungiamo, all'unità *positiva*, perché possiamo sempre sistemare le nuove variabili per avere un simile risultato; 2. che i suoi minori sono uguali ai corrispondenti elementi primari, in maniera tale che la matrice simmetrica rispetto la sua diagonale principale diventa la trasposta. Le altre proprietà sono facilmente derivabili dalla stessa definizione. L'argomento trattato in questo articolo richiede per la maggior parte l'uso di coordinate ortogonali.

Di nuovo, chiameremo *continuum lineare* quello determinato solamente da equazioni lineari, il cui numero, è ovviamente minore di n, l'ordine della varietà. Se indichiamo questo numero con $n-m$, potremo dire che un tale continuum lineare è un continuum di $n-m$ *condizioni*, o altrimenti di *m dimensioni* o anche un *continuum m-esimo,* questa ultima definizione indica il numero di variabili indipendenti. Poiché i due casi di continuum con una condizione e con una dimensione si presentano spesso, è utile trovare delle denominazioni per entrambi. Nel primo caso useremo indifferentemente i termini *equazione, polinomio, continuum* se saremo sicuri di non cadere in errore; nel secondo caso adotteremo la parola *linea* o *raggio*, quest'ultimo in particolare quando le rette considerate partono da una soluzione comune.

In linea generale, non eviteremo di usare il linguaggio della geometria, ai fini della brevità e chiarezza della spiegazione. Ad esempio, se un sistema di equazioni (lineare o meno) è soddisfatto da ogni soluzione di un altro sistema con numero maggiore di equazioni, potremo dire che il primo continuum *interseca* il secondo, o che il secondo *giace nel* (o *sul*) secondo. Questa stessa idea può talvolta essere espressa dal concetto di *dipendenza;* si dice che un'equazione (sia essa lineare o meno) *dipende* da diverse altre, quando è soddisfatta da ogni soluzione del sistema formato da queste ultime, ovvero quando il primo continuum, quello con una condizione, interseca il secondo continuum con numero di condizioni maggiori di uno. Inoltre, almeno per quanto concerne i continua, useremo il termine *dipendenza* in senso ancora più largo. Un continuum lineare *m-esimo* è determinato da $m+1$ soluzioni *indipendenti;* ora se una soluzione $(m+2)$-esima giace su quel continuum, diremo che questa nuova soluzione *dipende* da quelle $m+1$ soluzioni; e in questo modo è stato anche spiegato il significato della parola *indipendente* che abbiamo appena usato. L'importanza primaria di questa nozione ci obbliga a soffermarci più a lungo su di essa. Consideriamo a tale scopo $n-m$ equazioni lineari e omogenee rispetto alle $n+1$ variabili $w, x, y, \dots z$; se poi prendiamo a caso $m+1$ soluzioni $(a_0, b_0, c_0, \dots h_0)$, $(a_1, \dots)$, … $(a_m, \dots)$ del sistema, sarà facile vedere che non c'è altra soluzione dello stesso sistema che non possa essere riportata alla forma $w = a_0t_0 + a_1t_1 + \dots a_mt_m$, $x = b_0t_0 + \dots$, … $z = h_0t_0 + \dots$, dove $t_0, t_1, \dots t_m$, denotano dei coefficienti arbitrari. Gli m rapporti di questi ultimi sono adatti a mettere in evidenza le m dimensioni del continuum preso in esame; poiché avremmo dovuto aggiungere che i rapporti $\frac{x}{w}, \frac{y}{w}, \dots \frac{z}{w}$ rappresentano coordinate. Da un altro punto di vista, se un continuum lineare con una condizione $q=0$ interseca, o dipende da, un continuum con m condizioni $p_1=0,\ p_2=0,\ \dots p_m=0$, segue necessariamente che $q = a_1p_1 + \dots + a_mp_m$, dove

$a_1, a_2, \dots a_m$, denotano delle costanti qualsiasi. In sintesi, la dipendenza e la linearità sono nozioni interscambiabili sia per le soluzioni che per i polinomi. In questa sede, è giusto sottolineare che nella varietà *n*-esima non ci possono essere più di $n+1$ polinomi (lineari) indipendenti.

Quando tutto ciò che si sta considerando ha luogo nel contesto di un continuum lineare *m*-esimo, allora, ricorrendo ad una adeguata trasformazione delle coordinate possiamo far scomparire *m* di esse dalle $n-m$ equazioni; e poiché le rimanenti $n-m$ coordinate devono scomparire, dobbiamo conservare solo *m* variabili libere, e quindi, in effetti, sarà come se ci stessimo occupando meramente di una varietà *m*-esima.

D'altra parte, se non è tanto lo stesso continuum ma la mutua relazione o *posizione* delle equazioni lineari a determinare ciò che va considerato, possiamo trascurare tutte le *m* variabili che scompaiono e occuparci solo delle $n-m$ variabili, la cui scomparsa determina il continuum. Entrambi questi punti di vista verranno usati spesso d'ora in poi, ed è importante distinguerli bene.

Sia *r* la distanza di due soluzioni *O*, *P*, e *a, b, ... h* le coordinate ortogonali di *P*, avendo scelto *O* come origine; da qui se $r^2 = a^2 + b^2 + \dots + h^2$, possiamo definire *a,b, ...h* come le *proiezioni* del raggio *r*. Questo segmento *OP*, di lunghezza *r*, contiene tutte le soluzioni $(x = at,\ y = bt,\ \dots z = ht)$ per le quali $0 < t < 1$. Ora, sia *P'* una terza soluzione, indipendente da *O* e da *P*, con coordinate *a', b' ...h'* e sia *r'* la sua distanza da *O*. Poiché le tre soluzioni determinano un doppio continuum lineare (un piano), possiamo adottare il termine geometrico *angolo* nel suo significato più adatto, al fine di indicare la reciproca posizione delle due linee illimitate *OP, OP',* e dopo aver trasformato debitamente le coordinate e poi ripristinato le coordinate primitive, troveremo

$$r \cdot r' \cos \vartheta = a \cdot a' + b \cdot b' + \dots + h \cdot h' ,$$

dove ϑ denota l'angolo compreso tra le due rette.

Un continuum lineare con una condizione

$$p = ax + by + ... + hz + k = 0$$

ha due lati corrispondenti alle disuguaglianze $p > 0$ e $p < 0$. Nonostante non faccia differenza, in genere, per quale fattore costante moltiplichiamo l'equazione, tuttavia per quanto concerne i due lati, dobbiamo distinguere tra fattori negativi e positivi. Per evitare qualsiasi ambiguità considereremo dei coefficienti tali che $a^2 + b^2 + ... + h^2 = 1$ scarteremo l'idea di una moltiplicazione per -1, a meno che non volessimo scambiare i due lati. E' facile dimostrare che , sia $(x, y, ... z)$ una qualsiasi soluzione *P* della varietà e $(x', y', ... z')$ una soluzione *P'* della data equazione, il raggio $r = \sqrt{(x'-x)^2 + (y'-y)^2 + ... + (z'-z)^2}$ diventa minimo quando $x' = x - ap,\ y' = y - bp,\ ...\ z' = z - hp$. In questo caso r è $= p$ o $= -p$, a seconda che *p* sia positivo o negativo, ovvero se la soluzione libera *P* giace sul lato positivo o su quello negativo dell'equazione. La retta $(x + ar, y + br, ... z + hr)$, dove *r* rappresenta una lunghezza indeterminata, può quindi essere chiamata *normale* all'equazione, essendo *a,b, ...h i coseni direttori* di questa normale. Ora sia data un'altra equazione $p' = a'x + b'y + ... + h'z + k' = 0$, dove anche $a'^2 + b'^2 + ... + h'^2 = 1$, dopo aver tracciato la normale ad essa, chiamiamo supplementare ϑ dell'angolo compreso tra le due normali l'*angolo incluso* dalle due equazioni $p = 0$, $p' = 0$, e quindi abbiamo -cos $-\cos\vartheta = aa' + bb' + ... + hh'$. Il motivo per cui mettiamo il segno negativo prima di $\cos\vartheta$ è che l'angolo è un tipo di integrale semplice preso tra i vincoli $p > 0$, $p' > 0$, che scompare solo quando i limiti sono $p > 0$, $(-p) > 0$, ovvero, quando i vincoli sono tali da non consentire alla soluzione la più piccola deviazione dall'equazione *p*=0. Ma allora abbiamo che *a'=-a, b'=-b, ...h'=-h,* e conseguentemente $\cos\vartheta = a^2 + b^2 + ... + h^2 = 1$, $\vartheta = 0$, che concorda con l'asserzione di cui sopra.

Un continuum lineare *m*-esimo e uno $(n-m)$-esimo vengono chiamati reciprocamente *normali*, quando esiste un sistema di coordinate ortogonali tale che il primo continuum viene ad essere rappresentato dalle equazioni $x_{m+1}=0,\ x_{m+2}=0,\ \ldots\ x_n=0$, e il secondo dalle equazioni $x_1=0,\ x_2=0,\ \ldots\ x_m=0$, dove $x_1, x_2, \ldots x_n$ denotano le coordinate. Ogni due rette, una giacente nel primo e l'altra nel secondo continuum, formeranno un angolo retto; e lo stesso varrà per ogni coppia di continua lineari ad una condizione che attraversano quelle.

Possono bastare poche parole per mostrare come classificare la posizione reciproca di due continua lineari, di rispettivamente *p* e *q* dimensioni. Se $p+q>n$, allora $(n-p)+(n-q)<n$, ovvero, le $2n-p-q$ equazioni di entrambi i continua determinano un continuum lineare di $p+q-n$ dimensioni come loro intersezione comune. Trasformiamo ortogonalmente il sistema di coordinate al fine di avere $p+q-n$ dei suoi assi su questa intersezione, e, trascurando le corrispondenti dimensioni, dobbiamo occuparci solo di una varietà di $2n-p-q$ dimensioni, e i dati continua saranno sostituiti da un continuum di $n-q$ e da un altro di $n-p$ dimensioni. Quindi il caso è ridotto alla valutazione della reciproca posizione di due continua i numeri delle cui dimensioni sono nel loro insieme uguali a quello della varietà. D'altra parte, se $p+q<n$, facciamo passare attraverso un'origine comune due continua *paralleli* a quelli dati; insieme determineranno un continuum lineare di $p+q$ dimensioni, che consideriamo come una varietà; e il problema si riduce allo stesso caso di prima. Ora se $p+q=n$ e $p>q$, costruiamo un sistema di coordinate ortogonali che ha *q* dei suoi assi nel secondo continuum; allora i rimanenti *p* assi determineranno un continuum lineare che interseca il primo continuo in una di queste $n-2q=p-q$ dimensioni; facendo ciò consideriamo $p-q$ dei rimanenti *p* assi.

Facendo scomparire le corrispondenti dimensioni, ci occupiamo di una varietà di sole *2q* dimensioni e abbiamo ridotto il primo continuum a *q* dimensioni, mentre il secondo ha mantenuto il suo numero completo *q* di dimensioni. E quindi in ogni caso siamo infine portati a considerare due continua lineari ciascuno di *q* dimensioni, che hanno in comune una sola soluzione e situate in una varietà di *2q* dimensioni. Affermo ora che, in generale, è sempre possibile tracciare in ogni continuum *q* assi ortogonali tra di loro a partire dall'origine comune, e tali che ciascuno di essi forma un angolo obliquo [non retto] con il corrispondente asse nell'altro continuum, ma angoli retti con gli altri $q-1$ altri assi di quest'altro continuum. Di conseguenza la posizione reciproca dei due continua lineari dipende meramente dai valori dei *q* angoli obliqui.

Per completare ciò che è stato detto, dobbiamo sottolineare che qualsiasi q rette indipendenti, che partono da una soluzione comune e situate in un *q*-esimo continuum lineare, possono essere considerate come suoi *assi,* poiché ogni altra retta in esso, che parte anche da quella soluzione comune, può essere rappresentata semplicemente da composizioni lineari di questi assi.

Costruendo tutte le coordinate come frazioni con un denominatore comune *w* (che va considerato in un certo qual modo come la $(n+1)$-esima coordinata), chiamiamo *parallele* qualsiasi coppia di equazioni lineari che non possono coesistere a meno che $w=0$, ovvero, che hanno la loro intersezione completa nell'*equazione infinitamente distante* $w=0$, o in breve, che differiscono solamente per il termine costante. Due rette sono *parallele* quando sono determinate da $(n-1)$ coppie di equazioni parallele, o, in maniera simile, quando le proiezioni omologhe di loro porzioni limitate sono proporzionali.

L'idea generale che nella varietà *n*-esima corrisponde all'area nel piano e al volume nello spazio può essere chiamata *misura*, e per una porzione completamente limitata della varietà assumiamo come unità tutte le soluzioni comprese in

$$0<x<1,\ 0<y<1,\ \ldots\ 0<z<1.$$

In questo modo otteniamo l'integrale $\int^{n} dxdy\ldots dz$ come espressione di ogni porzione limitata della varietà.

Una porzione limitata di un continuum lineare $(n-m)$-esimo deva avere la stessa misura come nella varietà $(n-m)$-esima, e quindi la via più naturale di valutare ciò sarà quella di trasformare le coordinate in maniera tale che le m equazioni del continuum contengano non più di m coordinate; se quindi $x_{m+1}, x_{m+2}, \ldots x_n$ sono le altre coordinate (che scompaiono dalle equazioni), l'integrale $\int dx_{m+1}dx_{m+2}\ldots dx_n$ sarà la misura richiesta. Ora, ristabilendo l'iniziale sistema di riferimento, siano

$$\overset{i}{p}=\overset{i}{a}_1 x_1+\overset{i}{a}_2 x_2+\ \ldots +\overset{i}{a}_n x_n=0,\ \ [i=1,\ 2,\ \ldots\ \mathrm{m}]$$

le equazioni del continuum e M la misura della sua porzione, formiamo tutti i determinanti della matrice rettangolare $\left\|\begin{matrix} \overset{i}{a}_1 & \overset{i}{a}_2 & \overset{i}{a}_3 \\ \multicolumn{3}{c}{[i=1,\ 2,\ \ldots\ \mathrm{m}]}\end{matrix}\right\|$ e denotiamo con R^2 la somma dei loro quadrati, avremo tante equazioni della forma

$$R\int^{n-m} dx_1 dx_2\ \ldots\ dx_{n-m}=\begin{vmatrix} \overset{1}{a}_{n-m+1} & \overset{1}{a}_{n-m+2} & \ldots & \overset{1}{a}_n \\ \overset{2}{a}_{n-m+1} & \overset{2}{a}_{n-m+2} & \ldots & \overset{2}{a}_n \\ \ldots & \ldots & \ldots & \\ \overset{m}{a}_{n-m+1} & \overset{m}{a}_{n-m+2} & \ldots & \overset{m}{a}_n \end{vmatrix} M\ ,$$

quanti determinanti ci sono nella matrice. Ora, dato che il concetto di una porzione infinitamente piccola della misura di un continuum *curvo* di m condizioni non comporta difficoltà aggiuntive, possiamo immediatamente affermare questa conseguenza:

Siano $f_1(x_1, x_2, \ldots x_n) = 0,\ f_2 = 0,\ \ldots f_m = 0$ le m equazioni di un continuum curvo, formiamo tutti i determinanti della matrice rettangolare

$$\begin{Vmatrix} \frac{df_1}{dx_1} & \frac{df_1}{dx_2} & \frac{df_1}{dx_3} & \ldots & \frac{df_1}{dx_n} \\ \frac{df_2}{dx_1} & \frac{df_2}{dx_2} & \frac{df_2}{dx_3} & \ldots & \frac{df_2}{dx_n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & & \ldots \\ \frac{df_m}{dx_1} & \frac{df_m}{dx_2} & \frac{df_m}{dx_3} & \ldots & \frac{df_m}{dx_n} \end{Vmatrix},$$

chiamiamo R^2 la somma dei loro quadrati e denotiamo con $V(123\ldots m)$, per esempio, il determinante che corrisponde alla combinazione scelta degli indici delle coordinate; allora, la misura di una porzione limitata del continuum sarà

$$\int^{n-m} \frac{R}{V(123\ldots m)} dx_{m+1} dx_{m+2} \ldots dx_n$$

Per un continuum di una condizione $f_1(x_1, x_2, \ldots x_n) = 0$, otteniamo tra le altre l'espressione

$$\int^{n-1} \sqrt{\left(\frac{df}{dx_1}\right)^2 + \left(\frac{df}{dx_2}\right)^2 + \ \ldots\ + \left(\frac{df}{dx_n}\right)^2} \ \frac{dx_{m+1} dx_{m+2} \ldots dx_n}{\left(\frac{df}{dx_1}\right)}$$

Un continuum curvo *m*-esimo può essere anche rappresentato uguagliando le *n* coordinate a tante funzioni delle *m* variabili indipendenti $t_1, t_2, \ldots t_m$. Quindi, sia *R* la radice quadrata della somma dei quadrati di tutti i determinanti compresi nella matrice rettangolare

$$\begin{Vmatrix} \frac{dx_1}{dt_i}, \frac{dx_2}{dt_i}, \frac{dx_3}{dt_i}, \ldots \frac{dx_n}{dt_i}, \\ [i = 1,\ 2,\ 3,\ \ldots\ m] \end{Vmatrix},$$

la misura del continuum sarà $\int^m R dt_1 dt_2 \ldots dt_m$. Come caso particolare possiamo fare notare che la misura di un continuum (*curvo*) sarà $\int \sqrt{dx_1^2 + dx_2^2 + \ldots + dx_n^2}$.

Siano $p_1, p_2, \dots p_{n+1}$ $(n+1)$ funzioni lineari indipendenti delle n coordinate, ci sarà un'equazione identità

$$\alpha_1 p_1 + \alpha_2 p_2 + \dots + \alpha_{n+1} p_{n+1} = C,$$

dove nessuno dei coefficienti costanti α scompare; poiché questo è il significato di “indipendente”. Poiché i polinomi p sono pensati per fare da vincoli, possiamo, per maggiore semplicità, sostituire αp con p cosicché l'equazione identica diventa $p_1 + p_2 + \dots + p_{n+1} = C$, nella quale possiamo supporre che la costante C sia positiva. Consideriamo ora l'integrale $\int^n dx_1 dx_2 \dots dx_n$ con vincoli $p_1 > 0, p_2 > 0, \dots p_{n+1} > 0$; è evidente che nessun p può essere superiore a C; l'integrale proposto di conseguenza non contiene altri elementi oltre quelli che danno i valori finiti di p. Di nuovo, deve essere possibile esprimere le coordinate $x_1, x_2, \dots x_n$ in termini di tutti i p tranne uno (per volta); poiché se non fosse così gli n p utilizzati sarebbero connessi da una relazione identica, contro la supposta indipendenza. Di conseguenza, ogni soluzione entro i vincoli dati ha coordinate finite, da cui segue che anche l'integrale è finito. E' altresì ovvio che qualsiasi modifica dei segni dei vincoli renderebbe impossibile racchiudere una porzione finita della varietà. Questa deduzione finale può essere espressa così:

“Sono necessarie un minimo di $n+1$ equazioni lineari per racchiudere una porzione finita della varietà; per fare ciò, inoltre, è condizione necessaria e sufficiente che non vi siano relazioni identiche che non contengano tutti i polinomi; e il problema è quindi risolto in una maniera univoca.”

Quando più di $(n+1)$ equazioni lineari limitano una porzione della varietà, vogliamo sapere in maniera dettagliata da quali altre equazioni e in che misura è limitata ogni singola equazione, in poche parole, vogliamo delle informazioni sulla *rappresentazione grafica* di ogni equazione limitante, e questo richiede che si faccia lo stesso per una varietà inferiore, e così via, finché non raggiungiamo le linee limitanti o *bordi* della prima porzione data della varietà più alta. Proponiamo di chiamare *polyschemon*, la porzione (limitata) della varietà, e le figure limitanti degli ordini discendenti i suoi *perischemons*, se necessario *perischemons primario, secondario, ...n-ario*, o in maniera inversa: *perischemons* di dimensione nulla (i vertici), di una dimensione (gli spigoli), di due dimensioni (le facce piane), di tre dimensioni (i poliedri), di quattro, ... di $n-1$ dimensioni. Usando questo modo di esprimersi sorge un inconveniente, è vero, ossia che i vertici altresì detti *perischemon* di nessuna dimensione corrispondono, in un certo qual modo, alle equazioni lineari limitanti o *perischemon* primari, gli spigoli a quelli secondari e così via. Sarebbe forse più adatto considerare i vertici come *perischemon* di primo ordine crescente, e così via.

Il teorema di Eulero sui poliedri è ancora valido per questi *polyschemon* della di ordine *n* varietà. Questo perché, se costruiamo una rete di *perischemon* primari e denotiamo con a_0, a_1, a_2, ... a_{n-1}, a_n, rispettivamente il numero dei vertici, degli spigoli, delle facce piane, dei poliedri, ... delle equazioni lineari limitanti, e infine il numero zero o l'unità, a seconda che la rete sia aperta o racchiude un vero *polyschemon*, esisterà la relazione

$$a_0 - a_1 + a_2 - a_3 + a_4 - \dots + (-1)^{n-1} a_{n-1} + (-1)^n a_n = 1 .$$

Ciò va dimostrato per induzione.

Se facciamo passare dall'origine *n* equazioni lineari $p_1 = 0,\ p_2 = 0,\ \dots\ p_n = 0$ che non soddisfino nessuna delle identità del tipo $\sum \alpha p = 0$, i 2*n* vincoli

$$0 < p_1 < h_1,\ 0 < p_2 < h_2,\ \dots\ 0 < p_n < h_n$$

racchiuderanno una porzione finita della varietà che possiamo chiamare *paralleloschemon*. La sua misura è $h_1, h_2, \dots h_n : \Delta$, dove Δ è il determinante formato con i coefficienti delle equazioni $p = 0$.

O, siano $\left(\overset{1}{a}_1 , \overset{1}{a}_2 , \dots \overset{1}{a}_n \right)$ le soluzioni del sistema lineare $p_1 = h_1,\ p_2 = 0,\ p_3 = 0,\ \dots\ p_n = 0$, e così via, la misura è altresì la seguente

$\left\| \begin{matrix} \overset{1}{a}_1, \overset{1}{a}_2, \dots \overset{1}{a}_n \\ [i=1, 2, \dots n] \end{matrix} \right\|$. In altre parole, la misura di un *paralleloschemon* è uguale al determinante costruito a partire dalle proiezioni degli n spigoli che escono da un vertice. Questo teorema può essere dimostrato, esattamente come in geometria, rimuovendo e aggiungendo porzioni sovrapponibili, procedendo da una varietà inferiore a quella immediatamente superiore. Chiamando *base* la misura B_1 del *perischemon* $p_1 = 0$ e *altezza* la sua distanza h_1 dal *perischemon* parallelo, allora $B_1 h_1$ è la misura del *paralleloschemon*, dove B_1 è uguale alla radice quadrata della somma dei quadrati dei minori corrispondenti alla prima riga della matrice di sopra. Se θ_{12} è l'angolo tra i *perischemon* $p_1 = 0$ e $p_2 = 0$, e se il loro *perischemon* secondario comune misura C_{12}, la misura del *paralleloschemon* sarà anch'essa $B_1 B_2 \sin\theta_{12} : C_{12}$.

Di nuovo, se facciamo passare attraverso le estremità degli n spigoli che partono dall'origine una nuova equazione $p_{n+1} = 0$, avremo racchiuso un *polyschemon* del tipo più semplice, e la sua misura sarà la $(1.2.3 \dots n)$-esima parte della misura del *paralleloschemon*. Da ciò segue che in generale,

$$\overset{i}{a}_1, \overset{i}{a}_2, \dots \overset{i}{a}_n \; [i = 1, 2, 3, \dots n+1]$$

indicando le coordinate degli $n+1$ vertici di questo *polyschemon* del tipo più semplice così

la sua misura sarà $\dfrac{1}{1.2.3 \dots n} \left| \begin{matrix} 1, \overset{i}{a}_1, \overset{i}{a}_2, \overset{i}{a}_3, \dots \overset{i}{a}_n \\ [i=1, 2, 3, \dots n+1] \end{matrix} \right|$

SEZIONE III.

Le prime tracce che conosco della teoria delle equazioni generalizzate di secondo grado si trovano nell'opera *Mécanique Céleste* di Laplace che si occupa delle perturbazioni del sistema solare nel corso dei secoli. Il problema che viene risolto in quell'opera, tradotto nel linguaggio che abbiamo adottato, è quello di trovare gli assi principali di un'equazione quadratica in direzione e intensità (modulo), quando è scritta in coordinate ortogonali e con coefficienti reali. Si trova che le direzioni e i quadrati delle lunghezze degli assi principali sono tutti reali. Inoltre si ha che ci sono solo $\frac{n+2}{2}$ o $\frac{n+1}{2}$ (a seconda che *n* sia pari o dispari) differenti tipi di equazioni, uno dei quali non ammette soluzioni reali; il numero dei tipi con soluzioni reali è quindi $\frac{n}{2}$ o $\frac{n-1}{2}$. Per esempio, quando $n=3$, ci sono solo due tipi generali, quello rettilineo e quello che non contiene alcuna linea retta reale.

Non soffermiamoci oltre su questo argomento generale, ma procediamo ora ad analizzare uno dei suoi casi più specifici, l'equazione generale della sfera $x_1^2 + x_1^2 + \ \ldots \ + x_n^2 = a^2$; in cui l'origine che abbiamo adottato viene denominata *centro* e la costante *raggio.* Per il continuum curvo rappresentato da questa equazione propongo il termine *polisfera* o *n*-sfera; di conseguenza, una coppia di punti lungo una linea retta sarà detta *monosfera*, il cerchio *disfera*, e la superficie sferica *trisfera*. Questi nomi possono sembrare difficili, ma andiamo avanti.

Sebbene nel titolo di questo articolo io abbia suggerito il concetto di una porzione della varietà, racchiusa da un'equazione sferica e da *n* equazioni lineari passanti dal centro, tuttavia considereremo adesso la porzione corrispondente del continuum polisferico. Ciò rappresenta comunque una modifica molto piccola rispetto a quello che vogliamo dimostrare.

La seguente trasformazione di coordinate è molto importante:

$x_1 = r\cos\phi_1$, $x_2 = r\sin\phi_1\cos\phi_2$, $x_3 = r\sin\phi_1\sin\phi_2\cos\phi_3$, ...
$x_{n-1} = r\sin\phi_1\sin\phi_2 \ldots \sin\phi_{n-2}\cos\phi_{n-1}$,
$x_n = r\sin\phi_1\sin\phi_2 \ldots \sin\phi_{n-2}\cos\phi_{n-1}$

Le nuove coordinate r, ϕ_1, ϕ_2, ... ϕ_{n-1} verranno denominate *coordinate sferiche*. Quando queste vengono fatte variare una alla volta , mantenendo costanti le altre, la soluzione consisterà nei seguenti elementi di posizione:

$$dr,\ rd\phi_1,\ r\sin\phi_1 d\phi_2,\ r\sin\phi_1 \sin\phi_2 d\phi_3,\ \ldots,$$

$$r\sin\phi_1 \sin\phi_2 \ldots \sin\phi_{n-2} d\phi_{n-1},$$

i cui coseni direttori formano un sistema ortogonale; di conseguenza il prodotto di questi elementi di posizione, ovvero

$$r^{n-1}\ \sin^{n-2}\phi_1\ \sin^{n-3}\phi_2\ \ldots\ \sin^2\phi_{n-3}\ \sin\phi_{n-2}\ dr\ d\phi_1\ d\phi_2\ \ldots\ d\phi_{n-1}$$

rappresenta un infinitesimo del complesso, che viene espresso altrove nella forma $dx_1 dx_2 \ldots dx_n$. E' chiaro che l'elemento del continuum polisferico di raggio 1, che, usando le coordinate originali, si può esprimere nella forma $\frac{1}{x_1} dx_2 \ldots dx_n$ con $x_1^2 + x_1^2 + \ldots + x_n^2 = 1$, risulta ora essere

$$\sin^{n-2}\phi_1\ \sin^{n-3}\phi_2\ \ldots\ \sin^2\phi_{n-3}\ \sin\phi_{n-2}\ d\phi_1\ d\phi_2\ \ldots\ d\phi_{n-1}$$

e per il momento lo chiameremo ω. Sia K una porzione della varietà limitata da un continuum polisferico e da continua lineari che passano dal centro e sia S la porzione corrispondente del continuum polisferico, avremo

$$K = \int_{r=0}^{r=a} r^{n-1} dr \times \int^{n-1} \omega, \quad S = a^{n-1} \int^{n-1} \omega;$$

e quindi

$$K = \frac{aS}{n}$$

Possiamo, ovviamente, sostituire K con S in futuro, assumendo anche per brevità $a = 1$; proponiamo inoltre i seguenti nomi per le varie forme di S. Se non ci sono contorni lineari, possiamo chiamare S il *continuum polisferico totale*, con misura $2\pi^{\frac{n}{2}} : \Gamma\left(\frac{n}{2}\right)$; se esiste un numero di contorni lineari che passano dal centro maggiore di n, possiamo dire che S è un *polyschemon polisferico*, e se il numero corrisponde invece ad n, possiamo chiamarlo *plagioschemon*, poiché i suoi $\frac{n(n-1)}{2}$ *argomenti*, ovvero gli angoli compresi tra una coppia di lati retti, sono tutti arbitrari e quindi in generale obliqui; ma nel caso particolare in cui i vincoli lineari $p_1, p_2, \ldots p_n$ costituiscono una serie (invertibile ma non ciclicamente permutabile), in cui ciascuno di essi forma un angolo arbitrario solo col vincolo che lo precede o che lo segue più da vicino, ma è ortogonale ai rimanenti, useremo il termine *ortoschemon*. Per esempio, il triangolo rettangolo sferico è di quest'ultimo tipo; poiché i suoi lati formano una serie il cui termine centrale, l'ipotenusa, forma angoli obliqui con gli estremi della serie, mentre questi formano tra loro un angolo retto. Le singole parti di cui si compone la figura racchiusa possono essere chiamate *perischemons* primario, secondario, ... $(n-1)$-ario, intendendo con questa dicitura che un *perischemon* primario ha alcuni *perischemon* secondari come suoi *perischemon*, propriamente detti, e così via. Possiamo chiamare gli ultimi e i penultimi *perischemon* rispettivamente *vertici* e *spigoli*.

Dati *n* polinomi lineari $p_1, p_2, \ldots p_n$ privi del termine costante e non connessi da alcuna identità, considereremo adesso il *plagioschemon* S avente $p_1 > 0, p_2 > 0, \ldots p_n > 0$ come suoi vincoli e gli angoli compresi tra una coppia di vincoli, $(12), (13), \ldots (1n), (23), \ldots \{(n\text{-}1)n\}$ come suoi *argomenti*, cosicché per esempio (12) indica l'angolo compreso tra $p_1 > 0, p_2 > 0$. Per non incorrere in malintesi supponiamo che ogni argomento sia positivo e inferiore a π. I coefficienti dei polinomi *p* valgono come $n(n\text{-}1)$ costanti arbitrarie; ma poiché la possibilità di trasformare le coordinate in maniera ortogonale comporta che vi sia un numero di costanti disponibili di $\frac{1}{2}n(n\text{-}1)$, possiamo sottrarre questo numero al precedente, ottenendo un numero di costanti indipendenti pari a $\frac{1}{2}n(n\text{-}1)$.

Possiamo quindi assumere gli $\frac{1}{2}n(n-1)$ argomenti di S come le variabili indipendenti di cui S è una funzione. Ora siamo liberi di concepire un sistema di coordinate tale da far scomparire $x_1, x_2, \dots x_m$ assieme ai polinomi $p_1, p_2, \dots p_m$. Se omettiamo tutti i termini $x_1, x_2, \dots x_m$ nei rimanenti polinomi $p_{m+1}, p_{m+2}, \dots p_n$ e li dividiamo per la radice quadrata positiva della somma dei quadrati dei coefficienti di $x_{m+1}, x_{m+2}, \dots x_n$ possiamo indicare i polinomi ottenuti in questa maniera

$$p\{(123\dots m), m+1\},\ p\{(123\dots m), m+2\},\ \dots p\{(123\dots m), n\},$$

Ponendo la condizione che siano tutti positivi, questi polinomi determineranno il *perischemon* S $\{(123\dots m)\}$ dell'm-esimo ordine discendente, che è l'intersezione del continuum polisferico con quello lineare dalle m condizioni $p_1 = 0,\ p_2 = 0,\ \dots p_m = 0,$ sempre limitato dai rimanenti polinomi $p_{m+1}, p_{m+2}, \dots p_n$. *Indichiamo* con $\{(123\dots m), (m+1)(m+2)\}$ {(123...*m*), (*m*+1) (*m*+2)}, l'angolo tra

$$p\{(12\dots m), m+1\} > 0 \text{ e } p\{(12\dots m), m+2\} > 0;$$

allora tutti gli angoli di questo tipo saranno gli $\frac{1}{2}(n-m)(n-m-1)$ argomenti del *perischemon* S $\{(123\dots m)\}$. Ci sono in totale,* $\binom{n}{m}\binom{n-m}{2} = \binom{n}{2}\binom{n-2}{m}$ argomenti nell'ordine considerato. Infine vengono gli archi di un cerchio (detti lati), come S $\{(345\dots n)\}$, dei quali ciascuno è il suo stesso argomento, ovvero S $\{(345\dots m)\} = \{(345\dots m), 12\}$. Poiché il numero degli spigoli è $\frac{1}{2}n(n-1)$, possiamo concepire il *plagioschemon* S come funzione dei suoi spigoli. Il numero aggregato di tutte queste quantità angolari relative a S, inclusi gli argomenti propriamente detti e gli spigoli, è

* Per brevità poniamo $(1+x)^n = 1 + \binom{n}{1}x + \binom{n}{2}x^2 + \binom{n}{3}x^3 + \binom{n}{4}x^4 + \dots$

$$\sum_{m=0}^{m=n-2}\binom{n}{2}\binom{n-2}{m}=2^{n-2}\binom{n}{2}.$$

Il modo in cui sono connessi e in cui, in definitiva, dipendono dagli argomenti di S, può essere formulato così. Gli angoli compresi tra tre polinomi come

$$p\{(12...m),i\},\ p\{(12...m),j\},\ p\{(12...m),k\},$$

che appartengono ad un *perischemon* S $\{(12...m)\}$, che possiamo indicare come

$$\{(12...m),jk\},\ \{(12...m),ik\},\ \{(12...m),ij\},$$

possono essere visti come gli angoli di un triangolo sferico che ha

$$\{(12...mi),jk\},\ \{(12...mj),ik\},\ \{(12...mk),ij\},$$

come suoi spigoli, opposti ai corrispondenti angoli. Noti gli argomenti di S, quelli di ogni *perischemon* possono quindi essere calcolati di seguito utilizzando delle relazioni come quelle qui sottoscritte

$$\cos\{(1),\ ik\}=\frac{\cos(ik)+\cos(1i)\cos(1k)}{\sin(1i)\sin(1k)},$$

$$\cos\{(12),\ ik\}=\frac{\cos\{(1),ik\}+\cos\{(1),2i\}\ \cos\{(1),2k\}}{\sin\{(1),2i\}\ \sin\{(1),2k\}},\ \text{etc.}$$

etc.

Da questa sorta di concatenazione è chiaro che i supplementi degli argomenti saranno le stesse funzioni dei supplementi dei lati che i lati sono degli argomenti.

Cerchiamo di rappresentare gli argomenti di ciascun *perischemon* in modo immediato da quelli del dato *plagioschemon* S. E' chiaro che dobbiamo porre

$$\rho p((12...m),i)=p_i+\lambda_1 p_1+\lambda_2 p_2+...+\lambda_m p_m,$$

e determinare i fattori costanti λ tenendo in considerazione che il nuovo polinomio è ortogonale a ciascuno dei polinomi p_1, p_2, ... p_m ; di conseguenza questi fattori, assieme a ρ, devono soddisfare le equazioni

$$\begin{array}{l}
1-\rho^2-\lambda_1\cos(i1)-\lambda_2\cos(i2)-\ ...\ -\lambda_m\cos(im)=0\\
-\cos(1i)+\ \ \lambda_1\ \ -\lambda_2\cos(12)-\ ...\ -\lambda_m\cos(1m)=0\\
-\cos(2i)+\lambda_1\cos(21)+\ \ \lambda_2\ \ -\ ...\ -\lambda_m\cos(2m)=0\\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
-\cos(mi)-\lambda_1\cos(m1)-\lambda_2\cos(m2)-\ ...\ +\ \lambda_m\ =0
\end{array}$$

Sostituiamo i, ρ, λ con k, σ, μ; la somma dei prodotti dei coefficienti dei polinomi $p_i + \lambda_1 p_1 + \lambda_2 p_2 + ... + \lambda_m p_m$ e $p_k + \mu_1 p_1 + \mu_2 p_2 + ... + \mu_m p_m$ sarà ovviamente la stessa anche se l'ultimo polinomio viene sostituito da *pk*, poiché il primo deve essere ortogonale a $p_1, p_2, ... p_m$. Di conseguenza

$$\rho\sigma\cos\{(12...m),ik\}=\cos(ik)+\lambda_1\cos(1k)+\lambda_2\cos(2k)+\ ...\ +\lambda_m\cos(mk)$$

Quindi, ponendo per brevità

$$\Delta\begin{pmatrix} i & \\ & 123\ ...\ m \\ k & \end{pmatrix}=\begin{vmatrix} -\cos(ik) & -\cos(i1) & -\cos(i2) & ... & -\cos(im)\\ -\cos(1k) & 1 & -\cos(12) & ... & -\cos(1m)\\ -\cos(2k) & -\cos(21) & 1 & ... & -\cos(2m)\\ ... & ... & ... & ... & ...\\ -\cos(mk) & -\cos(m1) & -\cos(m2) & ... & 1 \end{vmatrix}$$

e indicando questo determinante con $\Delta(i123...m)$ in cui $k=i$ e di conseguenza $-\cos(ik)=1$, otteniamo

$$\rho\sigma\cos\{(12...m),\ ik\}\cdot\Delta(123...m)+\Delta\begin{pmatrix} i & \\ & 123...m \\ k & \end{pmatrix}=0,$$

$$-\rho^2\cdot\Delta(123...m)+\Delta(i123...m)=0,$$

$$-\sigma^2\cdot\Delta(123...m)+\Delta(k123...m)=0,$$

e quindi

$$\cos\{(123...m),\ ik\}=-\frac{\Delta\begin{pmatrix} i & \\ & 123...m \\ k & \end{pmatrix}}{\sqrt{\{\Delta(i123...m)\}}\cdot\sqrt{\{\Delta(i123...m)\}}},$$

dove le radici quadrate sono positive. Da ciò, per una proprietà risaputa dei determinanti, segue che

$$\sin^2\left\{(123...m),\ ik\right\} = -\frac{\Delta(ik123...m)\cdot\Delta(123...m)}{\Delta(i123...m)\cdot\Delta(i123...m)}$$

Dopo questa fase preparatoria, possiamo porre i polinomi vincolanti nel seguente modo

$$\left.\begin{array}{l} p_1 = x_1, \\ p_2 = -x_1\cos(12)+x_2\sin(12), \\ p_3 = -x_1\cos(13) - x_2\sin(13)\cos\left\{(1),23\right\} + x_3\sin(13)\sin\left\{(1),23\right\}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ p_m = -\sum_{\lambda=1}^{\lambda=m} x_\lambda \prod_{\mu=1}^{\mu=\lambda-1} \sin\left[\left\{123...(\mu-1)\right\},\mu m\right].\cos\left[\left\{123...(\lambda-1)\right\},\lambda m\right],[\text{for } m=1,\ 2,\ 3,\ ...n] \end{array}\right\}$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots.(a),$$

dove, nella parte finale, $-\cos\left[\left\{123...(m-1)\right\},mm\right]=1$. Chiamiamo quindi la soluzione $(x_1=0,\ x_2=0,\ ...\ x_{n-1}=0,\ x_n=0)$ l'*apice* A del *plagioschemon* S, e, di conseguenza, il perischemon $S\{(n)\}$ la sua *base*. Ora tracciamo la normale AB dall'apice A al continuum lineare $(p_n=0)$ della base, e sia $AB=\sin h$ la sua lunghezza. Dal centro O tracciamo un raggio attraverso B; la sua estremità C giacerà sulla base polisferica $S\{(n)\}$ e la chiameremo *piede* dell'arco circolare $AB=h$, che assumiamo come *altezza* del plagioschemon S. E' chiaro che $\sin h$ non è altro che il valore di p_n della soluzione A e quindi uguale al coefficiente di x_n in questo polinomio; quindi

$$\sin h = \sin(1n)\ \sin\left\{(1),2n\right\}\ \sin\left\{(12),3n\right\}\ \sin\left\{(123),4n\right\}\ ...\ \sin\left[\left\{12\ ...\ (n-2)\right\},(n-1)n\right],$$

in cui è consentita una permutazione degli indici $1,\ 2,\ 3,\ n-1$.

Le coordinate del piede C sono

$$x_1 = \tanh\ \cos(1n),\ x_2 = \tanh\ \sin(1n)\cos\left\{(1),\ 2n\right\},\ ...,\ x_n = \cos h$$

Infine, sia P una qualsiasi soluzione che si trovi sulla base polisferica $S\{(n)\}$ e chiamiamo ϕ l'arco di circonferenza dal vertice A, o l'angolo tra i raggi OA e OP.

Se ora immaginiamo uno *spazio* (o continuum lineare triplo) che passi attraverso i tre raggi OA, OC, OP, la sua intersezione con il continuum polisferico sarà una superficie sferica e ACP sarà un triangolo rettangolo sopra di essa con $AP=\phi$ come ipotenusa. Sia $\angle APC=\theta$, allora $\sin h=\sin\phi\sin\theta$. Attorno a P scegliamo dalla base $S\{(n)\}$ un elemento σ di $n-2$ dimensioni infinitamente piccole e uniamo tutte le sue soluzioni con il vertice A tramite archi circolari; in questo modo si evidenzierà una piccola parte del continuum polisferico, che si estende da A a P e non possiede alcuna estensione finita tranne che per questo arco; e tagliandolo a livello di P normalmente alla tangente del cerchio, la misura della sezione trasversale sarà di $\sigma\sin\theta$. Ma quando la parte di cui sopra è prodotta dall'equazione $x_n=0$ (la cui intersezione con la *polisfera* chiamiamo *equatore* riferendoci ad A come polo), la sua sezione può essere indicata con ω e chiamata l'*elemento equatoriale* corrispondente a σ.

Partendo da questi elementi possiamo dimostrare il seguente lemma:

SEZIONE IV.

Lemma: se ogni elemento di un *plagioschemon* S viene moltiplicato per il coseno dell'angolo in radianti compreso tra di esso e uno dei suoi vertici, che può essere considerato come vertice, allora la somma di questi prodotti sarà la $(n-1)$-esima parte del prodotto della misura della base e del seno dell'altezza.

Dimostrazione. Sia A l'apice, Q la soluzione su cui giace l'elemento, poniamo l'arco $AQ=\psi$ e le coordinate di Q

$x_1=\sin\psi\cdot x'_1$, $x_2=\sin\psi\cdot x'_2$, ..., $x_{n-1}=\sin\psi\cdot x'_{n-1}$, $x_n=\cos\psi$;

l'elemento del continuum polisferico sarà allora $\sin^{n-2}\psi\, d\psi\cdot\omega$,

dove $\omega=\dfrac{1}{x'_1}dx'_2\, dx'_3\, ...\, dx'_{n-1}\;\left[\text{per } x'^2_1+x'^2_2+\;...\;+x'^2_{n-1}=1\right]$ denota il corrispondente elemento *equatoriale*. Ora, per trovare il valore dell'integrale

$$\int^{n-1} \cos\psi \times \sin^{n-2}\psi \; d\psi \cdot \omega$$

esteso a tutto il *plagioschemon* S, supponiamo per prima cosa $x_1', x_2', \ldots x_{n-1}'$ costanti e integriamo da $\psi = 0$ a $\psi = \varphi$ appartenenti alla base $(p_n = 0)$. Otteniamo

$$\frac{1}{n-1}\int^{n-2} \sin^{n-1}\phi \cdot \omega.$$

Ma, come abbiamo visto prima, la sezione normale alla base è

$$\sin^{n-2}\phi \cdot \omega = \sigma \;\; \sin\theta = \frac{\sin h}{\sin\phi}\sigma,$$

e quindi l'integrale diventa

$$\frac{\sin h}{n-1}\int^{n-2}\sigma$$

come volevasi dimostrare.

Questo lemma ci consente di provare il seguente teorema fondamentale:

SEZIONE V.

Teorema. "Le derivate prime della misura di un plagioschemon, calcolate rispetto ai suoi argomenti, sono le $(n-2)$-esime parti delle misure dei corrispondenti *perischemon* secondari;" o

$$dS = \frac{1}{n-2}\left\{S\{(12)\}d(12) + S\{(13)\}d(13) + \;\ldots\; + S\{(n-1)n\}d\{(n-1)\}\right\}.$$

Dimostrazione. Al fine di variare il singolo argomento (12), variamo solo il polinomio p_1; questo diventa

$$(1+k_1)x_1 + k_2x_2 + k_3x_3 + \;\ldots\; + k_nx_n,$$

dove $k_1, k_2, \ldots k_n$ indicano quantità infinitamente piccole. Poiché la somme dei quadrati dei coefficienti deve rimanere uguale all'unità e gli argomenti

(13), (14), ... $(1n)$ costanti, abbiamo $n-1$ condizioni appena sufficienti a determinare gli $n-1$ rapporti $k_1 : k_2 : \ldots : k_n$. La prima condizione

$$(1+k_1)^2 + k_2^2 + k_3^2 + \ \ldots \ + k_n^2 = 0$$

degenera in $k_1 = 0$; poiché le quantità del secondo ordine possono essere trascurate. Ma in tal modo le condizioni prese nel loro insieme sono diventate tali come se dovessero determinare le coordinate del vertice $S\{(1345 \ldots n)\}$. Se ora consideriamo questo come l'apice del *perischemon* $S\{(1)\}$ e conseguentemente $S\{(12)\}$ come la sua base, comportandoci come se la dimensione x_1 non esistesse e applicando quindi i risultati precedenti a una varietà $(n-1)$-esima, possiamo cominciare a considerare il valore di x_2 all' apice come $\sin h$, il seno dell'altezza. Di nuovo, dall'equazione

$$-\cos\{(12)+d(12)\} = -\cos(12) + k_2 \sin(12)$$

da cui si ottiene l'angolo $(12)+d(12)$ tra il polinomio modificato $p_1{}' = x_1 + k_2 x_2 + \ \ldots \ + k_n x_n$ e quello inalterato $p_2 = -x_1 \cos(12) + x_2 \sin(12)$, otteniamo $k_2 = d\ (12)$. Di conseguenza il rapporto tra k_2, k_3, ... k_n e le coordinate omologhe del vertice $S\{(1345 \ldots n)\}$ è uguale al rapporto tra $d\ (12)$ e $\sin h$. Quindi, se ϕ denota l'angolo in radianti (tra l'ultimo vertice menzionato) di qualsiasi soluzione $(0, x_2, x_3, \ldots x_n)$ che giace sul perischemon $S\{(1)\}$, avremo

$$k_2 x_2 + k_3 x_3 + \ \ldots \ + k_n x_n = \cos\phi \frac{d\ (12)}{\sin h},$$

e quindi $p_1{}' = x_1 + \frac{\cos\phi}{\sin h} d\ (12)$. Ora i limiti di dS sono $p_1 < 0$, $p_1{}' > 0$, o $0 < -x_1 < \frac{\cos\phi}{\sin h} d\ (12)$, mentre i rimanenti limiti sono gli stessi di quelli di S; ma poiché x_1 è infinitamente piccolo, si possono prendere questi limiti rimanenti come se x_1 fosse $= 0$, ovvero possiamo sostituirli con i limiti di $S\{(1)\}$, ad esempio $p\{(1),\ 2\},\ p\{(1),\ 3\},\ ...\ p\{(1),\ n\}$. Di conseguenza otteniamo dS sommando tutti gli elementi di $S\{(1)\}$, ciascuno moltiplicato per $\frac{\cos\phi}{\sin h}\ d\ (12)$; da ciò segue per il precedente lemma che

$$dS = \frac{d\ (12)}{\sin h} \times \frac{1}{n-2}\ base\ S\{(12)\}.\sin h = \frac{1}{n-2} S\{(12)\}.d\ (12)$$

come volevasi dimostrare.

Questa versione del teorema presenta un inconveniente, ovvero che non può essere esteso fino a $n = 2$. Per evitare ciò possiamo tornare al primo integrale proposto

$$K = \int{}^n dx_1 dx_2\ ...\ dx_n\ \left(x_1{}^2 + x_2{}^2 +\ ...\ + x_n{}^2 < 1,\ p_1 > 0,\ p_2 > 0,\ ...\ p_n > 0\right),$$

che abbiamo visto essere $\frac{1}{n}S$, e in maniera simile possiamo introdurre come porzione del continuum lineare $(p_1 = 0,\ p_2 = 0)$, che ha il continuum polisferico e $p_3 > 0,\ p_4 > 0,\ ...\ p_n > 0$ come suoi limiti, $K\{(12)\} = \frac{1}{n-2}S\{(12)\}$. Il teorema in esame assume, allora, la forma più generale

$$dK = \frac{1}{n}\{K\{(12)\}\ d\ (12) + K\{(13)\}\ d\ (13) +\ ...\ + K\{(n-1)n\}\ d\ \{(n-1)n\}\}.$$

Quando $n = 2$, questa equazione si riduce a

$$dK = \frac{1}{2}K(12)\ d\ (12);$$

qui K è il settore di un cerchio, (12) il suo angolo al centro, e $K\{(12)\}$ è la misura del centro in una varietà di dimensione nulla, che non può essere altro che l'unità. In altre parole: il differenziale del settore di un cerchio di raggio 1 è la metà del differenziale del suo angolo al centro. Integrando, otteniamo $K = \frac{1}{2}(12)$.

Quando $n = 3$, il teorema generale ci dà

$$dK = \frac{1}{3}\left[K(12)d(12) + K(13)d(13) + K(23)d(23)\right];$$

dove K è una piramide sferica, che ha come base il triangolo sferico S; (12), (13), (23), sono gli angoli di S; $K\{(12)\}$ è la lunghezza del raggio che va fino al vertice $S\{(12)\}$ e quindi $=1$. Per determinare la costante di integrazione, facciamo scomparire K assumendo $p_1 = p_2 = -p_3$, che ci dà $(12)=\pi$, $(13)=(23)=0$. E quindi otteniamo

$$K = \frac{1}{3}\{(12)+(13)+(23)-\pi\}, \qquad \text{ovvero} \qquad S = (12)+(13)+(23)-\pi.$$

Possiamo osservare che ogni angolo in quanto quantità trascendente comporta un'unica integrazione, e che il problema relativo allo spazio non aumenta minimamente la difficoltà, ma si riduce a quello relativo al piano. La stessa cosa succede di nuovo in qualsiasi varietà con numero dispari di dimensioni.

Nella varietà quadrupla il *plagioschemon* $ABCD$ ha la stessa configurazione che un tetraedro ha nello spazio, con la differenza che i suoi *perischemon* primari sono triangoli sferici. Possiamo dire allora che la derivata rispetto all'argomento lungo lo spigolo AB è uguale a metà di questo spigolo AB. Se concepiamo tutti questi spigoli come infinitamente piccoli, il presente teorema porta, in effetti, a una nota espressione del volume di un tetraedro nello spazio.

Nella varietà quintupla il *perischemon* $S\{(12)\}$ diventa un triangolo sferico, di cui conosciamo già l'area; abbiamo quindi

$$\frac{dS}{d(12)} = \frac{1}{3}\Big[\{(12),\, 34\} + \{(12),\, 35\} + \{(12),\, 45\} - \pi\Big]$$

Distribuendo, nell'espressione completa di dS, i trenta termini simili a $\{(12),\, 34\}\, d\,(12)$ secondo le cinque combinazioni come quella (1234), e osservando che metà del gruppo a cui si allude è il differenziale completo di un *plagioschemon* tetrasferico con argomenti (12), (13), (14), (23), (24), (34), se quindi $S(1234)$ indica questo *plagioschemon* e $S(12345)$ quello pentasferico proposto, avremo

$$dS(12345)=\frac{2}{3}d\left\{S(1234)+etc.\right\}-\frac{\pi}{3}d\left\{(12)+etc.\right\}.$$

Al fine di determinare la costante di integrazione supponiamo che tutti gli argomenti siano angoli retti, ottenendo

$$S(12345)=\frac{\pi^2}{12} \qquad \text{e} \qquad S(1234)=\frac{\pi^2}{8}.$$

Segue quindi che

$$S(12345)=\frac{2}{3}\left\{S(2345)+etc.\right\}-\frac{\pi}{3}\left\{(12)+etc.\right\}-\frac{4\pi^2}{3};$$

o che c'è una riduzione da cinque a quattro dimensioni, come nel caso dello spazio. Sviluppiamo quindi ulteriormente questa osservazione, se non abbiamo scelto di sganciare in prima battuta le espressioni dalle Gamma-funzioni e dalle potenze di π.

SEZIONE VI.

Poniamo quindi

$$\int^n_{\begin{pmatrix} x_1^2+x_2^2+\ \dots\ +x_n^2<1 \\ p_1>0,\ p_2>0,\ \dots\ p_n>0 \end{pmatrix}} dx_1dx_2\ \dots\ dx_n = f(123\dots n)\times\int^n_{\begin{pmatrix} x_1^2+x_2^2+\ \dots\ +x_n^2<1 \\ x_1>0,\ x_2>0,\ \dots\ x_n>0 \end{pmatrix}} dx_1dx_2\ \dots\ dx_n,$$

o che è lo stesso,

$$K(123\dots n)=\frac{1}{2^n}\frac{\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}+1\right)}f(123\dots n),$$

$$S(123\dots n)=\frac{1}{2^{n-1}}\frac{\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}f(123\dots n),$$

e chiameremo $f(123...n)$ *funzione plagioschematica n-sferica*. Ogni funzione di questo tipo diventa l'unità, quando tutti i suoi argomenti sono $\frac{\pi}{2}$. Abbiamo per esempio,

$$f(12)=\frac{2}{\pi}(12),\ f(123)=f(12)+f(13)+f(23)-2$$

$$f(12345)=f(2345)+etc.-2\{f(12)+etc.\}+16.$$

Il teorema fondamentale assume adesso la forma

$$df(123...n)=f\{(12)34\ ...\ n\}\ df(12)+etc.$$

Supponiamo che ciascuno degli m polinomi vincolanti $p_1, p_2, ... p_m$ sia ortogonale a ciascuno dei $n-m$ rimanenti $p_{m+1}, p_{m+2}, ... p_n$. Niente ci vieta di eliminare il sistema di coordinate, cosicché nei primi polinomi compaiano solo le coordinate $x_1, x_2, ... x_m$. Di conseguenza, se queste dovessero comparire negli ultimi polinomi, potremmo dedurre, dalle corrispondenti m condizioni di ortogonalità, che il determinante dei coefficienti dei primi polinomi debba scomparire, cosa che a causa della loro indipendenza non può sussistere. Gli ultimi polinomi possono quindi contenere le rimanenti coordinate $x_{m+1}, x_{m+2}, ... x_n$. Sia ora

$$x_1^2+x_2^2+\ ...\ +x_m^2=\cos^2\theta,$$

e consideriamo le prime m coordinate costanti e svolgiamo l'integrazione rispetto alle ultime coordinate; allora i corrispondenti vincoli, avendo introdotto le variabili y, saranno uguali a quelli che erano in termini di $x_{m+1}, x_{m+2}, ... x_n$; ma va aggiunto il vincolo $y_1^2+y_2^2+...+y_{n-m}^2<1$. Da ciò segue che

$$K(123\ ...\ n)=f\{(m+1)\ (m+2)\ ...\ n\}\times\int^n \sin^{n-m}\theta.\ dx_1dx_2\ ...\ dx_m.\ dy_1dy_2\ ...\ dy_{n-m}$$

$$(p_1>0,\ p_2>0,\ ...\ p_m>0,\ y_1>0,\ y_2>0,\ ...\ y_{n-m}>0)$$

e ripristinando le coordinate originali

$$= f\{(m+1)\ (m+2)\ \dots n\} \times \int^n dx_1\ dx_2\ \dots \mathrm{d}x_m .\ dx_{m+1} dx_{m+2}\ \dots \mathrm{d}x_n$$
$$(p_1 > 0,\ \dots p_m > 0,\ x_{m+1} > 0,\ \dots x_n > 0)$$

Se invece assumiamo che le ultime coordinate siano costanti, otteniamo alla stessa maniera di prima

$$K(123\ \dots n) = f\{(m+1)\ (m+2)\ \dots n\} \times f(12\ \dots m) \times \int^n dx_1 dx_2\ \dots \mathrm{d}x_n \qquad ;$$
$$\begin{pmatrix} x_1^{\ 2} + x_2^{\ 2} +\ \dots\ + x_n^{\ 2} < 1 \\ x_1 > 0,\ \dots x_n > 0 \end{pmatrix}$$

e quindi, alla fine,

$$f(123\ \dots n) = f(12\ \dots m) \times f\{(m+1)(m+2)\ \dots n\};$$

o per dirlo a parole, se i polinomi che limitano una funzione *plagioschematica* formano due gruppi tali che tutti i polinomi di uno sono ortogonali a tutti quelli dell'altro, questa funzione sarà il prodotto di due funzioni inferiori corrispondenti ciascuna a uno dei due insiemi.

Dato che, com'è facile intuire, $f(1) = 1$, il fatto che il primo polinomio sia ortogonale a tutti gli altri implica che $f(123\ \dots n) = f(23\ \dots n)$; e quando i primi m polinomi sono ortogonali non solo a tutti gli altri, ma anche tra di loro, avremo che

$$f(123\ \dots n) = f(12\ \dots m) \times f\{(m+1)(m+2)\ \dots n\};$$

Quando due funzioni *plagioschematiche* differiscono l'un l'altra semplicemente per i segni opposti in uno dei polinomi vincolanti, la loro somma sarà doppia rispetto alla funzione vincolata solo dai rimanenti polinomi. Per esprimere questo concetto in simboli, scriviamo $f(p_1, p_2, \dots p_n)$ anziché $f(123\ \dots n)$; abbiamo quindi

$$f(p_1, p_2, \dots p_n) + f(-p_1, p_2, p_3, \dots p_n) = 2f(p_2, p_3, \dots p_n)$$

Poiché nell'integrale dato dall'unione delle due funzioni il polinomio p_1 è scomparso, la somma sarà la stessa, qualsiasi sia il polinomio che sostituisce p_1, per esempio uno che è ortogonale a tutti gli altri. Questa conseguenza è ovvia.

SEZIONE VII.

Riduzione di un plagioschemon perissosferico

Al fine di distinguere i due casi di un numero di dimensioni pari o dispari useremo i termini *artiosfera* e *perissosfera*; e per quanto riguarda la riduzione cui abbiamo appena accennato di una funzione plagioschematica perissosferica in termini lineari di quelli artiosferici, enunciamo ora il seguente teorema generale:

Teorema. "Sia f_{2n+1} una funzione plagioschematica vincolata dai polinomi p_1, p_2, p_{2n+1}, e denotando con $\sum f_{2m}$ la somma di tutte le funzioni $2m-$sferiche vincolate da qualsiasi $2m$ di questi polinomi (si assume che $f_0 = 1$), allora

$$f_{2n+1} = \sum_{i=0}^{i=n} (-)^i a_i \sum f_{2n-2i} \qquad (1)$$

dove i coefficienti a sono definiti dall'espansione in serie

$$\tan x = \sum_{i=0}^{i=\infty} a_i \frac{x^{2i+1}}{1.2.3...(2i+1)} \qquad (2)"$$

Dim. Se differenziamo l'equazione (1) rispetto a qualsiasi argomento di f_{2n+1}, come per esempio (12), l'ultimo termine $(-1)^n a_n$ sulla destra scompare, e otteniamo

$$f_{2n+1}\{(12)\} = \sum_{i=0}^{i=n-1} (-)^i a_i \sum f_{2n-2i-2}\{(12)\},$$

un' equazione simile, in cui il numero di dimensioni passa da $2n+1$ a $2n-1$ e i polinomi vincolanti vengono sostituiti da $p\{(12),3\}, p\{(12),4\}, \dots p\{(12),n\}$. Se supponiamo che il teorema sia vero per la $(2n-1)-$sfera, possiamo ottenere la formula (1) integrando quest'ultima equazione (o piuttosto l'equazione differenziale completa che si deduce da essa), ma ci rimane da dimostrare che la costante di integrazione $(-1)^n a_n$ è stata debitamente determinata. In effetti, se supponiamo che tutti gli argomenti di f_{2n+1}, siano angoli retti e consideriamo che la somma $\sum f_{2n+2i}$ valida per tanti termini quanti sono i modi in cui $2n+1$ elementi possono essere combinati da $2n-2i$, allora l'equazione (1) diventa

$$1=\sum_{i=0}^{i=n}(-)^i a_i\binom{2n+1}{2i+1},$$

o, divisa per $1.2.3...(2n+1)$,

$$\sum_{i=0}^{i=n}\frac{(-)^i}{1.2.3...(2n+2i)}\cdot\frac{a_i}{1.2.3...(2i+1)}=\frac{(-)^n 1}{1.2.3...(2n+1)};$$

equazione che si ottiene rendendo uguali da entrambi lati i coefficienti di x^{2n+1} nell'espansione $\cos x\times\tan x=\sin x$ (dove $\tan x$ va sostituito con la serie (2)). La costante di integrazione verrebbe ad essere determinata in maniera esatta, se il teorema fosse verificato per $2n-1$ dimensioni. Ora, poiché $a_0=1$, $a_1=2$ e per la trisfera l'equazione $f_3=\sum f_2-2$ risulta vera, il teorema risulta dimostrato.

SEZIONE VIII.

Sezionamento di un plagioschemon in ortoschemon.

Continuiamo con un'importante riduzione che porta il numero di argomenti arbitrari della funzione $n-$sferica considerata da $\frac{1}{2}n(n-1)$ a $n-1$.

Quando i polinomi $p_1, p_2, \dots p_n$, che vincolano un *plagioschemon* s sono *in questo ordine* ortogonali a tutti gli altri tranne che al precedente e al successivo, cosicché solo gli $n-1$ argomenti (12), (23), (34), (45), ... $\{(n-1)n\}$ possono essere angoli acuti, chiamiamo s *un ortoschemon*, e il nostro obiettivo è quello di dimostrare che ogni *plagioschemon* $n-$sferico può esser sezionato in

$1.2.3...(n-1)$ *ortoschemons*, i cui argomenti sono connessi con quelli del dato *plagioschemon* da relazioni trigonometriche.

Per illustrare il concetto di un *ortoschemon*, creiamo un sistema di coordinate in cui ciascuno dei polinomi vincolanti contiene una coordinata in più del precedente, cosa che è sempre possibile. I polinomi avranno quindi queste forme:

$p_1 = x_1,$

$p_2 = -x_1 \cos(12) + x_2 \sin(12),$

$p_3 = \qquad -x_2 \cos\{(1),\ 23\} + x_3 \sin\{(1),\ 23\}$

$p_4 = \qquad\qquad -x_3 \cos\{(12),\ 34\} + x_4 \sin\{(12),\ 34\}$

....

$p_n = -x_{n-1} \cos\left[\{123...(n-2)\},\ (n-1)n\right] + x_n \sin\left[\{123...(n-2)\},\ (n-1)n\right],$

I polinomi vincolanti e gli argomenti dei *perischemon* $S\{(m)\}$ sono

$$p\{(m),\ m-1\} = \frac{p_{m-1} + p_m \cos\{(m-1)m\}}{\sin\{(m-1)m\}},$$

$$p\{(m),\ m+1\} = \frac{p_{m+1} + p_m \cos\{m(m+1)\}}{\sin\{m(m+1)\}},$$

e per ciascun indice i diverso da $m-1$, m, $m+1$ abbiamo

$$p\{(m),\ i\} = p_i;$$

e in più

$$\cos\{(m),\ (m-2)(m-1)\} = \frac{\cos\{(m-2)(m-1)\}}{\sin\{(m-1)m\}},$$

$$\cos\{(m),\ (m+1)(m+2)\} = \frac{\cos\{(m+1)(m+2)\}}{\sin\{m(m+1)\}},$$

$$\cos\{(m),\ (m-1)(m+1)\} = \cot\{(m-1)m\}\cot\{m(m+1)\};$$

Inoltre

$$\{(m),\ i(i+1)\} = \{i(i+1)\},\ \text{dove}\ i = 1,\ 2,\ 3,\ ...\ m-3,\ m+2,\ ...\ n-1;$$

e tutti gli altri argomenti di $S\{(m)\}$ sono angoli retti. Possiamo quindi dedurre immediatamente che tutti i perischemon di un ortoschemon, qualunque sia il numero delle dimensioni, sono essi stessi ortoschemon e che i polinomi, dai quali ciascuno di essi è vincolato, seguono lo stesso ordine (sebbene interrotto da spazi) dei loro indici nell'ortoschemon originale. Un triangolo sferico viene diviso nel minor numero di ortoschemon quando viene condotto un arco perpendicolare da un qualsiasi vertice al suo spigolo opposto.; intendo i due triangoli rettangoli. Ma in maniera più generale, possiamo anche ottenere sei, ovvero $1.2.3$, triangoli del genere tracciando da qualsiasi punto interno tre archi perpendicolari agli spigoli e altri tre fino ai vertici.

Per evitare di ragionare con parti negative, possiamo supporre che tutti gli argomenti di un plagioschemon siano angoli acuti, e possiamo prendere una soluzione interna come un punto di partenza per il sezionamento. Le formule analitiche suggerite successivamente da questo ristretto punto di vista ristabilirebbero comunque la generalità in qualche modo compromessa. Nella varietà quadrupla siamo aiutati dall'idea di un tetraedro in cui conduciamo delle perpendicolari da un punto interno verso ciascuna faccia e prendiamo i loro piedi come punti di partenza per dividere ogni faccia in sei triangoli rettangoli; questi ventiquattro triangoli determineranno altrettanti tetraedri, aventi ognuno quel punto interno come apice.

Uno di questi corrisponde, per esempio, alla permutazione (1234), se denotiamo le facce del tetraedro originario con $S\{(1)\}$, $S\{(2)\}$, $S\{(3)\}$, $S\{(4)\}$ e possiamo indicarlo come segue. Dal punto interno A facciamo cadere sulla faccia $S\{(1)\}$, la perpendicolare il cui piede chiameremo $A(1)$; da questo tracciamo una perpendicolare allo spigolo $S\{(12)\}$}, intersezione delle facce $S\{(1)\}$ e $S\{(2)\}$, e chiamiamo $A(12)$ il suo piede; da questo seguiamo lo stesso spigolo fino al vertice

$S\{(123)\}$, che possiamo allo stesso modo considerare come piede $A(123)$. Di conseguenza, A, $A(1)$, $A(12)$, $A(123)$ sono i vertici del tetraedro, o piuttosto dell'*ortoschemon*, che volevamo indicare come corrispondente alla permutazione (1234); le sue facce seguono questo ordine: la prima coincide con $S\{(1)\}$, la seconda passa attraverso $S\{(12)\}$ e A, la terza attraverso $S\{(123)\}$, A, $A(1)$, la quarta attraverso A, $A(1)$ e $A(12)$; la prima è perpendicolare alla terza e alla quarta, e la seconda alla quarta; e quindi questo lo si può chiamare con il termine *ortoschemon*.

Una volta spiegato in maniera sufficiente l'ordine da seguire nel sezionamento di qualsiasi *plagioschemon*, continuiamo con l'esposizione in forma analitica. Assumiamo una permutazione, come per esempio $(123\ldots n)$, come regola su cui procedere, e prendiamo quindi, cosa che ci deve essere consentita, un sistema di coordinate ortogonali tale che ogni polinomio $p_1, p_2, \ldots p_n$, contenga una coordinata in più del suo predecessore, e allo stesso tempo tale che l'indice di ogni coordinata in più concordi con quello del polinomio (vedi (a) nella Sez.3.). Questo sistema è organizzato in maniera tale che possiamo ottenere facilmente da esso i polinomi che vincolano i perischemon $S\{(12)\}$, $S\{(123)\}$, $S\{123\ldots(n-2)\}$. Indicando i polinomi nel solito modo e in modo conforme quelli di S con $p(1), p(2), \ldots p(n)$ anziché $p_1, p_2, \ldots p_n$, abbiamo con una sorta di inversione

$$p\{(1), m\} = \frac{p(1)\cos(1m) + p(m)}{\sin(1m)},$$
$$[m = 2, 3, 4, \ldots n],$$

$$p\{(12), m\} = \frac{p\{(1), 2\}\cos\{(1), 2m\} + p\{(1), m\}}{\sin\{(1), 2m\}},$$
$$[m = 3, 4, \ldots n],$$

$$p\{(123),\ m\} = \frac{p\{(12),\ 3\}\cos\{(12),\ 3m\} + p\{(12),\ m\}}{\sin\{(12),\ 3m\}},$$
$$[m = 4,\ \dots n],$$

....

$$p\left[\{12\dots(n-2),\ m\}\right] = \frac{p\left[\{12\dots(n-3),\ n\text{-}2\}\right]\cos\left[\{12\dots(n-3)\},\ (n-2)m\right] + p\left[\{12\dots(n-3)\},\ m\right]}{\sin\left[\{12\dots(n-3)\},\ (n-2)m\right]},$$
$$[m = n-1,\ n],$$

e infine,

$$p\left[\{12\dots(n-1),\ n\}\right] = x_n = \frac{p\left[\{12\dots(n-2),\ n\text{-}1\}\right]\cos\left[\{12\dots(n-2)\},\ (n-1)m\right] + p\left[\{12\dots(n-2)\},\ n\right]}{\sin\left[\{12\dots(n-2)\},\ (n-1)n\right]}.$$

Questo sistema inverso ci dà le coordinate di ogni soluzione

$$x_1 = p(1),\ x_2 = p\{(1),\ 2\},\ x_3 = p\{(12),\ 3\},\ x_4 = p\{(123),\ 4\},\ \dots,$$

quando sono noti i polinomi $p(1), p(2), \dots p(n)$, ovvero le *distanze* da quella soluzione ai continua lineari che vincolano *S*; ci permette quindi di rappresentare queste coordinate appropriate per la permutazione $(123\dots n)$ in maniera indipendente dal sistema di coordinate. È utile sottolineare che l'equazione della polisfera cambia nella seguente

$$p\{(1)\}^2 + p\{(1),\ 2\}^2 + p\{(12),\ 3\}^2 + p\{(123),\ 4\}^2 + \dots p\left[\{12\dots(n-1)\},\ n\right]^2 = 1,$$

o, che è lo stesso, nella

$$\begin{vmatrix} 1 & . & p(1) & . & p(2) & . & p(3) & . & \dots & . & p(n) \\ p(1) & . & 1 & . & -\cos(12) & . & -\cos(13) & . & \dots & . & -\cos(1n) \\ p(2) & . & -\cos(21) & . & 1 & . & -\cos(23) & . & \dots & . & -\cos(2n) \\ \dots\dots & \dots & \dots\dots\dots\dots & \dots & \dots\dots\dots\dots & \dots & \dots\dots\dots\dots & \dots & \dots\dots\dots & . & \dots\dots\dots\dots \\ p(n) & . & -\cos(n1) & . & -\cos(n2) & . & -\cos(n3) & . & \dots & . & 1 \end{vmatrix} = 0$$

Una prova immediata di questa equazione si ha considerando che il determinante non è altro che

$$\left\| \begin{array}{c|c} x_1, x_2, x_n & x_1, x_2, x_n \\ \text{coefficienti in } p(1) & \text{coefficienti in } p(1) \\ \text{"} \quad \text{"} \ p(2) & \text{"} \quad \text{"} \ p(2) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots \end{array} \right\|$$

e che, poiché ogni rettangolo contiene qui una linea orizzontale in più rispetto alle linee verticali, l'espressione deve scomparire allo stesso modo.

Se prendiamo la soluzione ancora variabile come vertice comune A di tutti gli *ortoschemon* che dobbiamo tagliare, allora la lettera p, che indica un polinomio che appartiene ad una soluzione indeterminata, può essere sostituita con la lettera a, per indicare un polinomio che appartiene ad A, in maniera tale che

$$a(1),\ a\{(1),2\},\ a\{(12),3\},\ a\left[\{12...(n-1)\},n\right],$$

saranno le coordinate di A nel sistema particolare adottato sopra. Quelle dei piedi successivi $A(1)$, $A(12)$, $A(123)$, ... saranno facilmente ricavabili da questo gruppo eliminando tanti termini a partire dall'inizio quanti vengono indicati dall'ordine del piede e dividendo i rimanenti per la radice quadrata della somma dei loro quadrati. Di nuovo, denotando con $q(1), q(2), \ldots q(n)$ i polinomi che vincolano l'ortoschemon relativo alla permutazione $(123...n)$; quindi $q_1 = p(1)$; q_2 passa attraverso $S\{(12)\}$ e A, e, a meno di un fattore costante, può essere scritto così

$$-a\{(1),\ 2\}\ p(1) + a(1)\ p\{(1),\ 2\};$$

in generale, q_m passa attraverso $S\{(12...m)\}$ e A, $A(1)$, $A(12)$, $A(123)$, ... $A\{12...(m-2)\}$, condizione soddisfatta da

$$-a\left[\{12...(m-1)\},\ m\right]p\left[\{12...(m-2)\},\ m-1\right] + a\left[\{12...(m-2)\},\ m-1\right]p\left[\{12...(m-1)\},\ m\right]$$

e infine otteniamo una formula soggetta alla stessa regola per q_n, che passa attraverso A, $A(1)$, $A(12)$, ... $A\{123...(n-2)\}$. Si può aggiungere che l'espressione appena scritta è identica alla seguente

$$a\left[\{12...(m-2)\},\ m-1\right]p\left[\{12...(m-2)\},\ m\right]-a\left[\{12...(m-2)\},\ m\right]p\left[\{12...(m-2)\},\ m-1\right]$$

divisa per

$$\sin\left[\{12...(m-2)\},\ (m-1)m\right]$$

e che quindi rimane uguale in qualunque modo gli indici $1,\ 2,\ 3,\ ...\ m-2$ vengano permutati, ma che cambia segno permutando $m-1$ e m. Di conseguenza abbiamo un'idea dell'adiacenza di differenti ortoschemon. Per quanto concerne il segno di q_m, dobbiamo far sì che (con $a(1)$ $a\{(1),\ 2\}$, $a\{(1),\ 2\}$, $a\{(12),\ 3\}$ ... tutti supposti positivi) diventi positivo per il vertice opposto $A\{12...(m-1)\}$. Poiché è questo il caso, non dobbiamo cambiare segno. Poiché $p\left[\{12...(m-2)\},\ m-1\right]$, $p\left[\{12...(m-1)\},\ m\right]$, sono le coordinate x_{m-1}, x_m nel sistema particolare adottato sopra, possiamo considerare i loro coefficienti (nell'espressione di cui sopra =costante $\times\ q_m$) come la base e la perpendicolare di un triangolo rettangolo piano, e possiamo porre

$$\tan\beta_{m-1}=\frac{a\left[\{12...(m-2)\},\ m-1\right]}{a\left[\{12...(m-1)\},\ m\right]}$$

in modo da avere

$$q_m=-\cos\beta_{m-1}\cdot p\left[\{12...(m-2)\},\ m-1\right]+\sin\beta_{m-1}\cdot p\left[\{12...(m-1)\},\ m\right].$$

Ciò è completamente in accordo con il modo di rappresentare i polinomi che vincolano un *ortoschemon*, di cui sopra. Ora, se $\angle(12)$, $\angle(23)$, $\angle(34)$, $\angle\{(n-1)\ n\}$ denota gli argomenti dell'*ortoschemon* in esame, abbiamo

$$\cos\angle(12)=\cos\beta_1,\ \cos\angle(23)=\sin\beta_1\cos\beta_2,\ \cos\angle(34)=\sin\beta_2\cos\beta_3,$$

$\cos\angle(45)=\sin\beta_3\cos\beta_4$, ... $\cos\angle\{(n-1)n\}=\sin\beta_{n-2}\cos\beta_{n-1}$

Trascurando un fattore costante, possiamo anche scrivere l'equazione $q_m=0$ in questo modo:

$$\begin{vmatrix} -\cos(i1).-\cos(i2).-\cos(i3).\ \dots\ -\cos\{i(m-2)\}.a(i).p(i) \\ [i=1,\,2,\,3,\,\dots m] \end{vmatrix}$$

dove $-\cos(i\,i)$ va sostituito con 1. Questo perché è chiaro che, in primis, questo determinante scompare per ogni soluzione del *perischemon* $S\{(12\,\dots\,m)\}$ e per A; e poiché è ortogonale rispetto a $p(1), p(2), \dots p(m-2)$, o in breve, a $S[\{12\,\dots\,(m-2)\}]$; di conseguenza, che non passa solo per A, ma anche attraverso $A(1)$, $A(12)$, $A(123)$, ... $A\{12\,\dots\,(m-2)\}$. Inoltre, questa forma fa vedere che qualsiasi permutazione, indifferentemente degli indici $1,\,2,\,\dots\,m-2$, o degli indici $m+1,\,m+2,\,\dots\,n$, non ha influenza in questo ambito. Possiamo quindi dedurre prontamente il numero di *ortoschemon* che hanno il continuum lineare illimitato q_m come vincolo comune.

Ciò che è stato detto finora, mostra chiaramente come trovare gli argomenti di tutti i $1.2.3\dots n$ *ortoschemons* in cui un dato *plagioschemon* può essere sezionato da una soluzione arbitraria interna. Né penso sia necessario soffermarci sulle semplificazioni che subiscono le formule generali quando vengono applicate al caso in cui la soluzione di partenza del sezionamento sia un vertice.

SEZIONE IX.

Ridurre ortoschemon perissosferici in ortoschemon artiosferici.

A prima vista questo problema sembra essere di facile soluzione considerando il discorso appena fatto sui plagioschemon; ed è vero che per qualsiasi numero piccolo di dimensioni non è molto difficile applicare la precedente formula generale al problema specifico qui proposto. Ma procedendo in questo modo, risulta molto difficile giungere ad una legge generale; preferiamo quindi risolvere il problema in esame senza ricorrere alla precedente formula.

La natura dell'argomento in questione ci fornisce una osservazione preliminare. Sia $f(123\ldots n)$ una funzione *ortoschematica*, le cui cifre si riferiscono ai polinomi vincolanti e rimuovendo alcuni di questi polinomi in maniera tale che il loro ordine sia qua e là interrotto da degli spazi vuoti: allora, nella funzione formata a partire dai rimanenti polinomi, i polinomi di ciascuna serie continua saranno ortogonali a tutti quelli non contenuti nella stessa serie, e di conseguenza la funzione si risolverà in tanti fattori *ortoschematici* quante sono le serie continue tra gli spazi rimasti vuoti. Per esempio, se $i+1<m<n$, allora

$$f\{123\ldots i.\, m(m+1)\ldots n\} = f\{123\ldots i\}.f\{m(m+1)\ldots n\}$$

Nella proposizione seguente vanno adoperati solo fattori artiosferici.

Teorema. "Sia f_{2n+1} una funzione *ortoschematica* vincolata da $2n+1$ polinomi ordinati normalmente, se si eliminano da essa $2i+1$ polinomi in tutti i modi possibili, ma in maniera tale che ogni serie continua tra due spazi vuoti contenga un numero pari di polinomi, e denotiamo con $\sum f_{2n-2i}$ la somma di tutte le funzioni che corrispondono a queste combinazioni (funzioni che o non possono essere scomposte o che sono il risultato del prodotto di funzioni, a seconda che la serie sia continua o interrotta): allora è vera la formula

$$f_{2n-2i} = \sum_{i=0}^{i=n} \frac{(-)^i}{i+1}\binom{2i}{i}\sum f_{2n-2i} \quad \text{"}$$

Dimostrazione. Ci possiamo chiedere, per prima cosa, in quanti modi $2i+1$ termini possono essere eliminati dalla serie $1, 2, 3, \ldots 2n$ in maniera tale che rimanga un gruppo pari di termini in ogni gruppo di continui. Iniziando da sinistra scriviamo le lettere dell'alfabeto seguendo il loro ordine sotto *ciascuna* cifra eliminata e sotto ciascuna *coppia* di cifre non eliminate; in questo modo useremo $n+i+1$ lettere, delle quali quelle scritte sotto le cifre eliminate formeranno una combinazione di $(2i+1)-$esima classe. Non otteniamo la stessa combinazione da qualsiasi altra disposizione delle cifre; e, in maniera reciproca, data una qualsiasi combinazione di lettere (di questa classe), è facile trovare l'unica corrispondente disposizione di cifre. Di conseguenza, il numero di tali disposizioni di cifre è lo stesso delle combinazioni di $n+i+1$ lettere prese a $2i+1$ per volta e senza elementi che si ripetano. La somma $\sum f_{2n-2i}$ contiene quindi $\binom{n+i+1}{2i+1}$ termini.

Ora, per provare in fase preliminare le costanti nella formula enunciata, supponiamo che i $2n+1$ polinomi siano tutti ortogonali tra di loro; dato che ogni funzione f ha valore 1, il problema è verificare se la formula

$$1=\sum_{i=0}^{i=n}\frac{(-)^i}{i+1}\binom{2i}{i}\binom{n+i+1}{2i+1}$$

risulta essere vera. Se indichiamo con h_n la sommatoria sulla destra, abbiamo

$$h_n-h_{n-1}=\sum_{i=0}^{i=n}\frac{(-)^i}{i+1}\binom{2i}{i}\binom{n+i}{2i}=\frac{1}{n}\sum(-)^i\binom{n+i}{i+1}\binom{n}{i}=-\frac{1}{n}\sum\binom{-n}{i+1}\binom{n}{n-i}=-\frac{1}{n}\binom{0}{n+1}=0;$$

di conseguenza $h_n=h_{n-1}=h_{n-2}=...=h_0=1$, come volevasi dimostrare.

Derivando la funzione sopra enunciata rispetto a qualsiasi incognita di f_{2n+1}, otterremo la stessa formula, che varrà adesso per $2n-1$ dimensioni, e otterremo lo stesso risultato con tutti gli altri argomenti. Se, quindi, la corrispondente formula è vera nella varietà $(2n-1)-$esima, l'equazione che si ottiene differenziando in maniera completa la formula sarà verificata, e quindi alla stessa maniera, per integrazione, si vede che la formula sarà verificata; da cui integrando segue che la formula originale è vera, perché appare evidente che la costante di integrazione è esatta. Per completare la dimostrazione è solo necessario aggiungere che l'equazione

$$f(123)=f(23)+f(12)-1$$

sia soddisfatta.

Aggiungiamo due ulteriori esempi da utilizzare d'ora in poi:

$$f(12345)=f(2345)+f(1234)+f(12)f(45)-\{f(45)+f(34)+f(23)+f(12)\}+2,$$

$$f(1234567)=f(234567)+f(123456)+f(12)f(4567)+f(1234)f(67)-\{f(4567)+f(3456)+$$
$$+f(2345)+f(1234)+f(34)f(67)+f(23)f(67)+f(23)f(56)+f(12)f(67)+f(12)f(56)+$$
$$+f(12)f(45)\}+2\{f(67)+f(56)+f(45)+f(34)+f(23)+f(12)\}-5.$$

Appendice II

Ludwig Schläfli

Anzeige einer Abhandlung über die Theorie der vielfachen Kontinuität

Die Abhandlung, die ich hier der Kaiserlichen Akademie der Wissenschaften vorzulegen die Ehre habe, enthält einen Versuch, einen neuen Zweig der Analysis zu begründen und zu bearbeiten, welcher, gleichsam eine analytische Geometrie von n Dimensionen, diejenigen der Ebene und des Raumes als spezielle Fälle fuer $n = 2, 3$ in sich enthielte. Ich nenne denselben Theorie der vielfachen Kontinuität überhaupt in demselben Sinne, wie man zum Beispiel die Geometrie des Raumes eine Theorie der dreifachen Kontinuität nennen kann. Wie in dieser eine Gruppe von Werten der drei Koordinaten einen Punkt bestimmt, so soll in jener eine Gruppe gegebener Werte der n-Variabeln x, y, ... eine Lösung bestimmen.

Ich gebrauche diesen Ausdruck, weil man bei einer oder mehreren Gleichungen mit vielen Variabeln jede genügende Gruppe von Werten auch so nennt; das Ungewöhnliche der Benennung liegt nur darin, daß ich sie auch noch beibehalte, wenn gar keine Gleichung zwischen den Variabeln gegeben ist. In diesem Falle nenne ich die Gesamtheit aller Lösungen die n-fache Totalität; sind hingegen $1, 2, 3, \dots$ Gleichungen gegeben, so heißt bzw. die

Gesamtheit ihrer Lösungen $(n-1)$-faches, $(n-2)$-faches, $(n-3)$-faches, ... Kontinuum.

Aus der Vorstellung der allseitigen Kontinuität der in einer Totalität enthaltenen Lösungen entwickelt sich diejenige der Unabhängigkeit ihrer gegenseitigen Lage von dem System der gebrauchten Variabeln, insofern durch Transformation neue Variabeln an ihre Stelle treten können. Diese Unabhängigkeit spricht sich aus in der Unveränderlichkeit dessen, was ich den Abstand zweier gegebener Lösungen $(x, y, ...)$, $(x', y', ...)$ nenne und im einfachsten Fall durch

$$\sqrt{(x'-x)^2 + (y'-y)^2 + \dots}$$

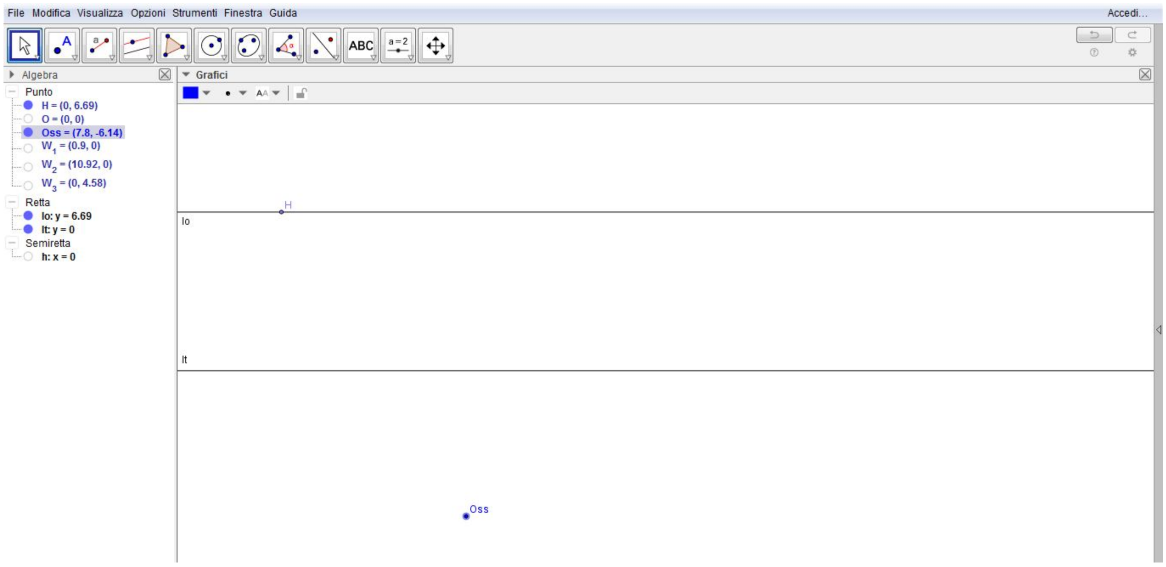
definiere, indem ich gleichzeitig das System der Variabeln ein orthogonales heiße

Appendice III

La costruzione prospettica di un ipercubo con geogebra

La seguente guida è diretta ad uno studente di liceo scientifico che abbia nozioni di disegno tecnico che gli consentano di fare costruzioni grafiche in prospettiva e che conosca i rudimenti per operare con il software

1. Si disegnino sull’asse delle ascisse due qualsiasi punti W_1 e W_2 e una retta lt passante per essi. Tale retta sarà la linea di terra che servirà per tutte le costruzioni seguenti. Inoltre la lt è la retta che divide il piano del disegno nella parte superiore dello schermo che chiameremo *piano della rappresentazione prospettica* (o *piano delle trasformate*) e la parte inferiore che chiameremo *piano di pianta*.
2. Sull’asse delle ordinate si disegni un punto W_3 con ordinata positiva e una semiretta h con origine in $O(0;0)$ e passante per W_3.
3. Si disegni il punto H vincolato ad h in modo che sia possibile variarne l’ordinata lasciando fissa l’ascissa. Tale punto serve a determinare l’”altezza” dell’osservatore e per esso si deve condurre la parallela alla lt che prende il nome di linea di orizzonte lo. Si possono nascondere i punti W, la semiretta h e i riferimenti cartesiani.
4. Si disegni il punto Oss nel semipiano inferiore a lt. Esso rappresenta la collocazione dell’osservatore nel *piano di pianta*. La situazione sarà la seguente:

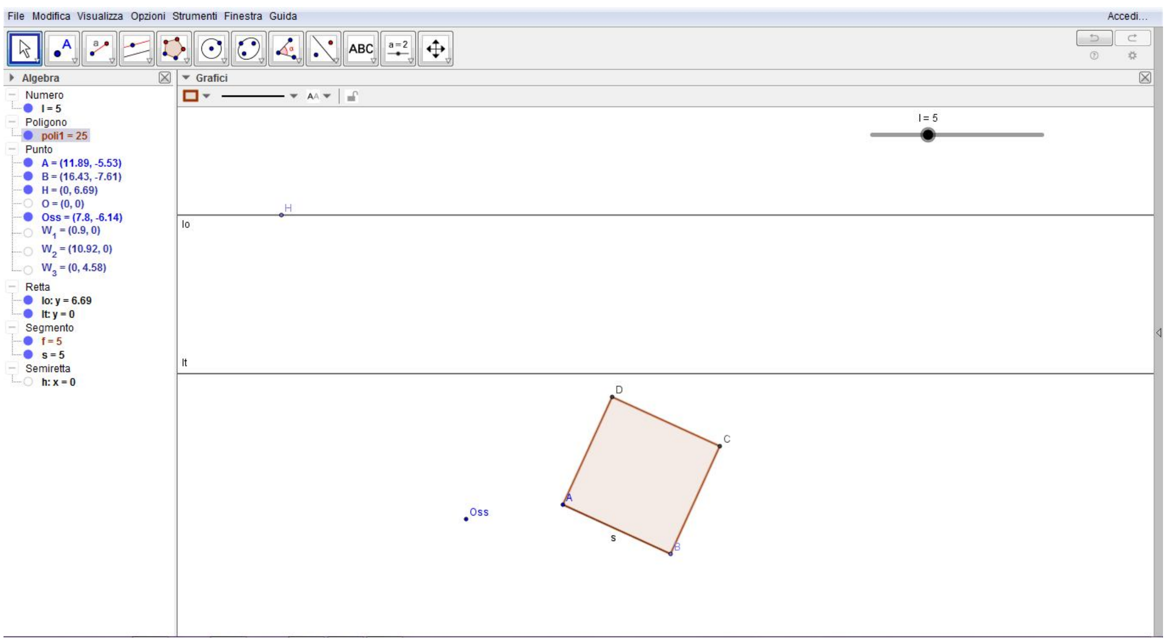


5. Si disegni un quadrato $ABCD$ di lato s: tale quadrato sarà la faccia di un cubo che a sua volta rappresenterà una cella dell'ipercubo:

   a. Si costruisca lo slider l (lettera "elle") che rappresenta a lunghezza del lato del quadrato (dell'ipercubo). Esso deve avere un valore minimo positivo (si può scegliere 0.1), un valore massimo ed un incremento a piacere (per esempio 15 e 0.1).

   b. Si disegni un punto A nel *piano di pianta* e il segmento di estremo A e lunghezza l ("elle"), lo si chiami s ed avrà estremi A e B.

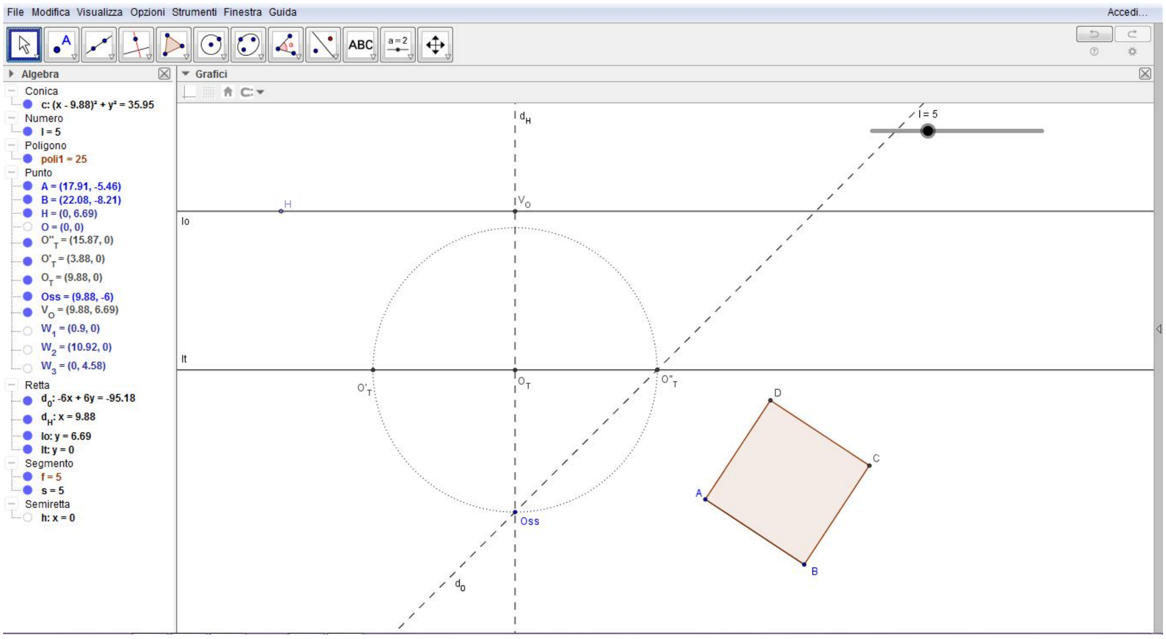
   c. Con il comando "poligono regolare" disegnare un quadrato di lato AB.



Costruzione dell’immagine prospettica del quadrato ACBD

6. Da Oss si conduca la retta d_H perpendicolare alla lt. Tale retta servirà come direzione principale per la determinazione di tutte le rette parallele ad essa. d_H interseca lt nel punto O_T e lo nel punto V_O.

7. Dalla seconda retta d_O per la determinazione della posizione di un dato punto sul *piano delle trasformate* è quella passante per Oss che forma un angolo di $45°$ con la lt. Per disegnare tale retta si può disegnare la circonferenza di centro O_T e raggio O_TOss. Tale circonferenza interseca la lt nei punti O'_T e O''_T. La retta d_O sarà la congiungente $O''_T Oss$.



Il punto V_O prende il nome di *punto di vista frontale* o *fuga della vista centrale* o *punto principale* e rappresenta il punto in cui il raggio visuale principale incontra il quadro, ovvero il punto verso cui, nel *piano delle trasformate,* fugano tutte le rette che in pianta sono perpendicolari alla lt.

8. Si disegni la retta k perpendicolare alla lt passante per O'_T. Essa interseca la lo nel punto F_1 che è il fuoco verso cui, nel *piano delle trasformate,* convergeranno tutte le linee che nel *piano di pianta* sono parallele alla d_O. La retta k e la circonferenza c possono essere nascoste.

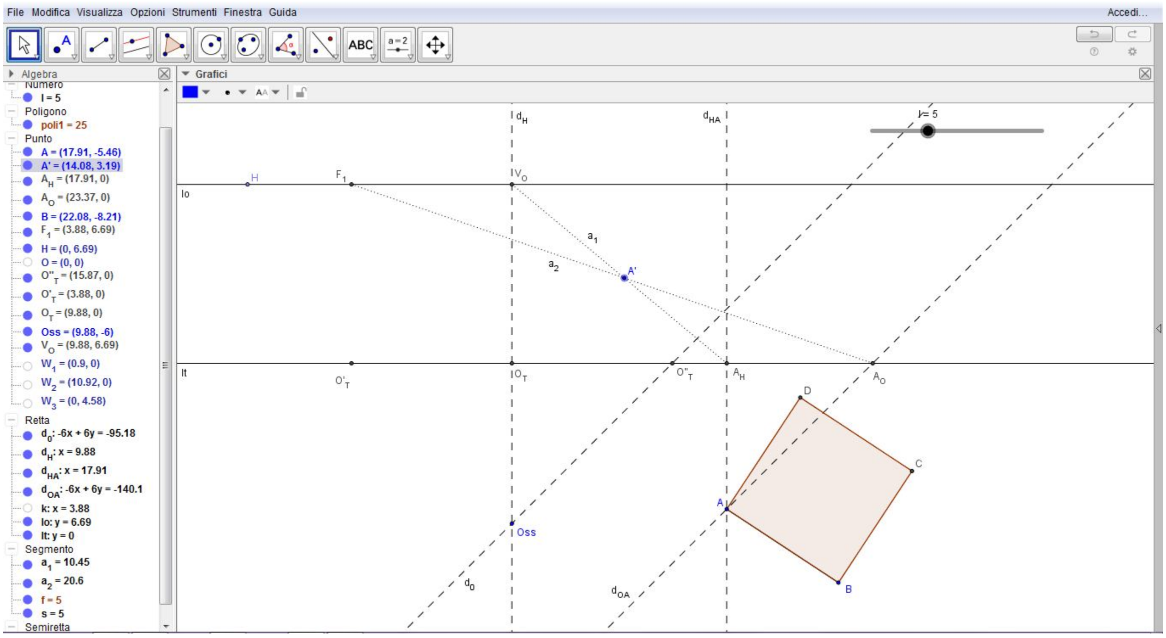
Procedura (PpPt) per la proiezione di un punto dal piano di pianta al piano delle trasformate

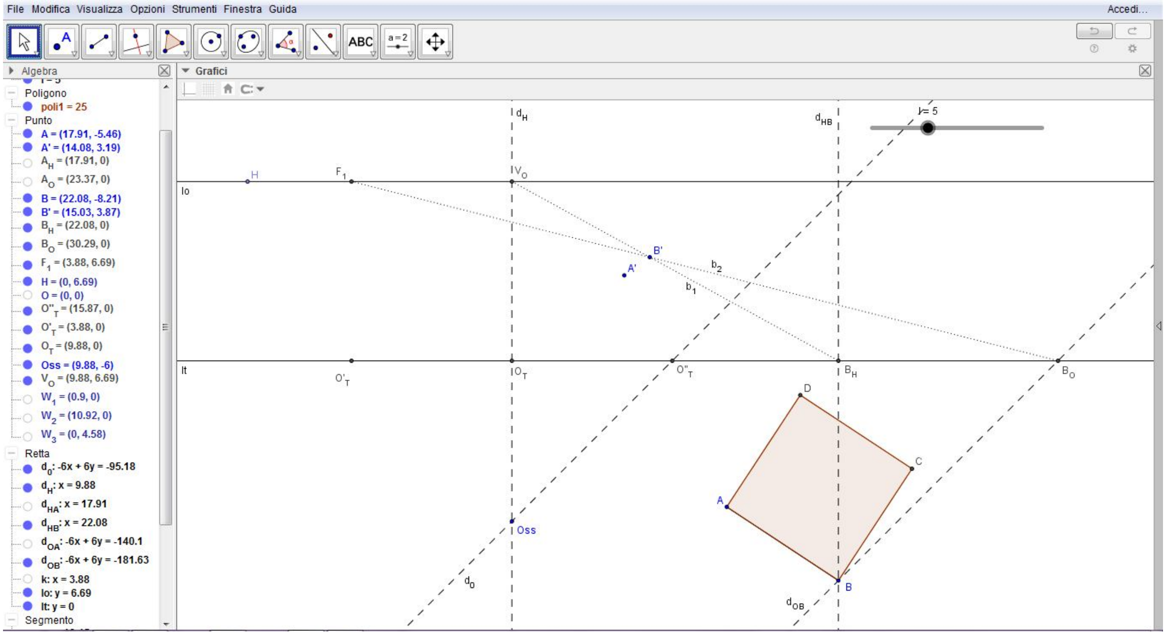
I. Disegnare una retta d_{OP} parallela alla d_O e un'altra retta d_{HP} perpendicolare alla lt entrambe passanti per il punto nella sua rappresentazione in pianta (ad esempio il punto P). Tali rette intersecheranno in due punti la lt e li chiameremo con la stessa lettera del punto da trasformare e pedici rispettivamente 0 (zero) e H (per rappresentare il punto P chiameremo tali due punti con P_0 e P_H).

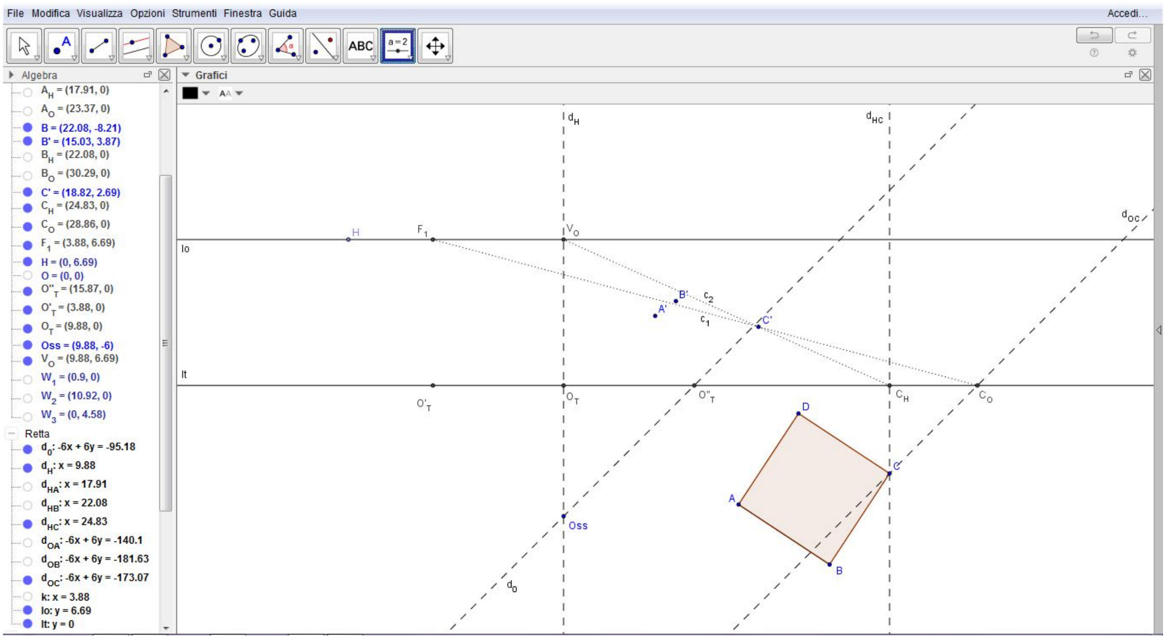
II. Riferendoci all'esempio del punto P, disegniamo i due segmenti P_0F (che chiameremo con p_1) e P_HV_0 (che chiameremo con p_2). Tali segmenti rappresentano sul *piano delle trasformate* due rette del piano di pianta: la d_{OP} e la d_{HP}. Pertanto il punto P', immagine di P nel piano delle trasformate, è il punto di intersezione dei due segmenti P_0F e P_HV_0.

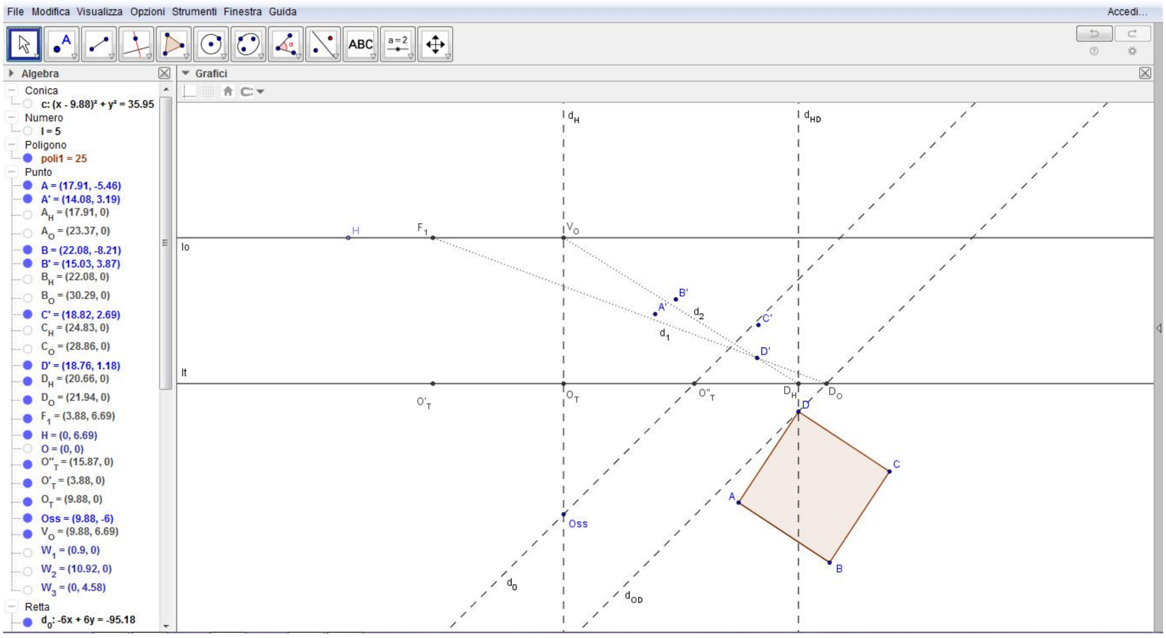
_______*fine della procedura (PpPt)*

9. Applicare la procedura *(PpPt)* ai punti A, B, C e D per disegnare il quadrato $A'B'C'D'$ trasformato di $ABCD$. Al termine di ogni procedura nascondere le linee di costruzione.

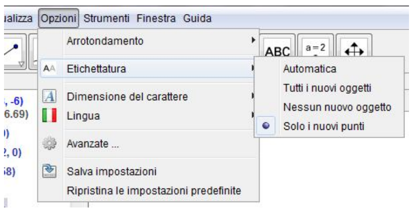


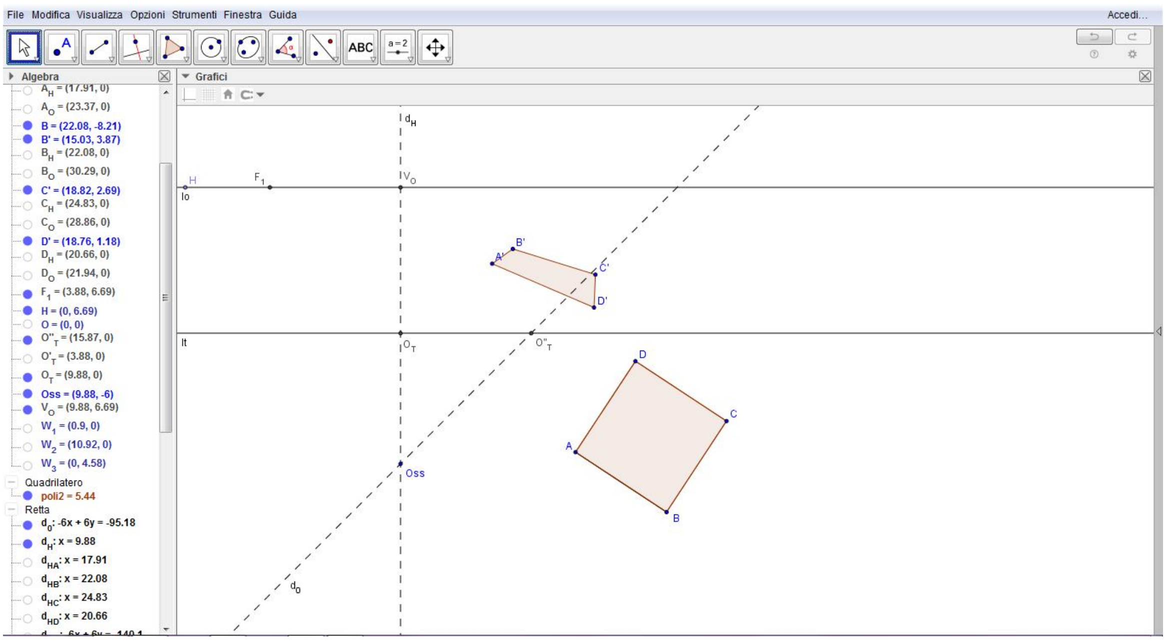

File Modifica Visualizza Opzioni Strumenti Finestra Guida
Accedi...
Algebra
Grafici
Poligono
poli1 = 25
Punto
A = (17.91, -5.46)
A' = (14.08, 3.19)
B = (22.08, -8.21)
B' = (15.03, 3.87)
H = (0, 6.69)
O = (0, 0)
Oss = (9.88, -6)
Retta
lo: y = 6.69
lt: y = 0
Segmento
lo
lt
H
Oss
A
B
C
D


File Modifica Visualizza Opzioni Strumenti Finestra Guida
Accedi...
Algebra
Grafici
B = (22.08, -8.21)
B' = (15.03, 3.87)
C' = (18.82, 2.69)
H = (0, 6.69)
O = (0, 0)
Oss = (9.88, -6)
Retta
lo: y = 6.69
lt: y = 0
lo
lt
H
Oss
A
B
D



10. Dopo aver selezionato dal menù "Opzioni → Etichettatura → Solo i nuovi punti" si può disegnare il poligono $A'B'C'D'$ che è, sul *piano delle trasformate*, il quadrato $ABCD$ che si vuole rappresentare.





Costruzioni nella terza dimensione

Tutto ciò che si sviluppa sui piani paralleli al piano perpendicolare al *piano di pianta*, quello della terza dimensione che nella pianta non è possibile evidenziare, sarà proiettato in modo che le rette trasformate siano tutte parallele tra loro. Bisogna però determinare la lunghezza di ogni singola "altezza" da rappresentare.

Si può operare come segue:

Procedura (SpVt) per la proiezione di un o spigolo della terza dimensione

I. Disegnare un punto P sul *piano di pianta*, la retta d_{HP} perpendicolare per P a lt, e il punto P_H intersezione tra d_{HP} e lt.

II. Disegnare una circonferenza di centro P_H e raggio l ("elle", lato del quadrato). Denominare con P'_H l'intersezione "superiore" di tale circonferenza e la retta d_{HP}.

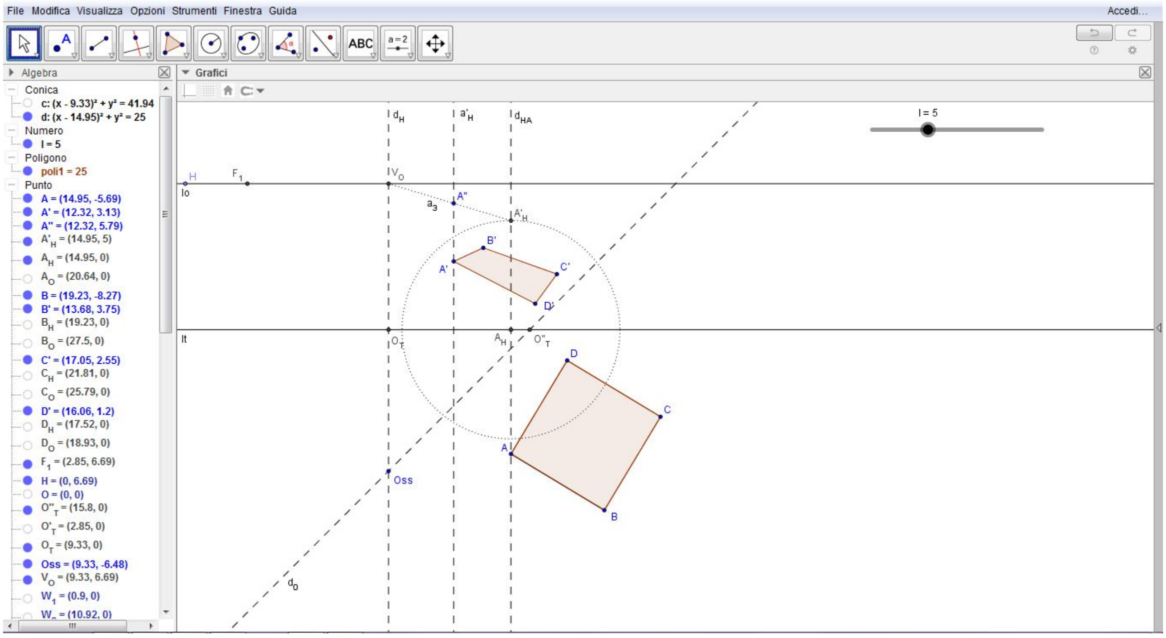
III. Unire con un segmento p_3 il punto P'_H e il punto di fuga V_O.

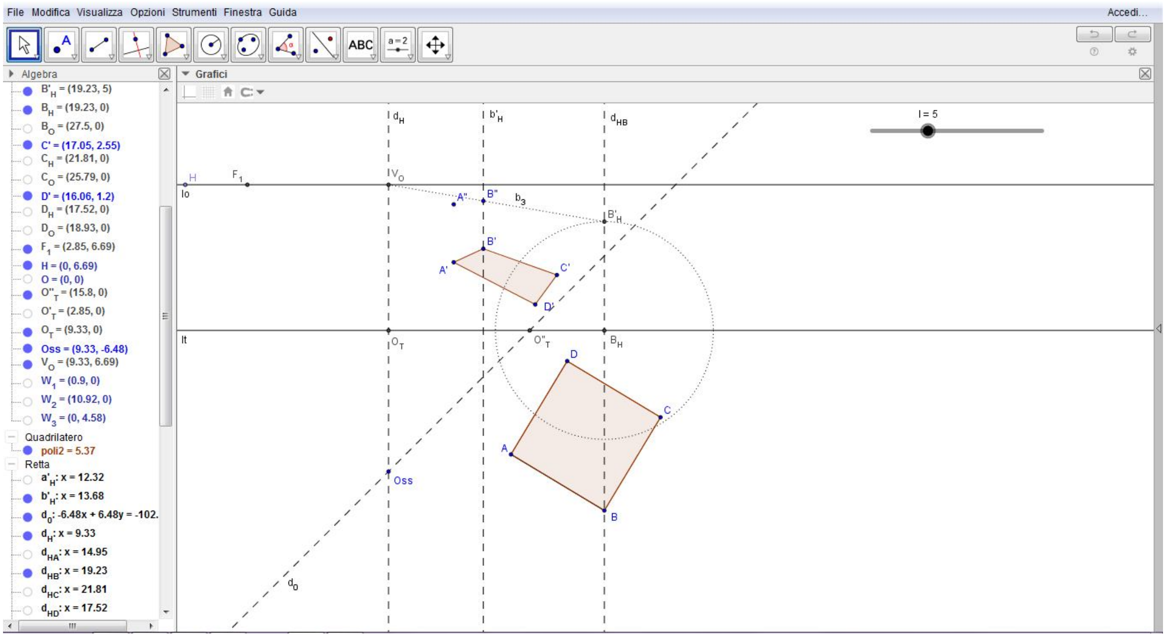
IV. Disegnare la retta p'_H perpendicolare a lt e passante per P'. L'intersezione tra p_3 e p'_H è il punto P'' che rappresenta il secondo estremo dello spigolo "verticale".

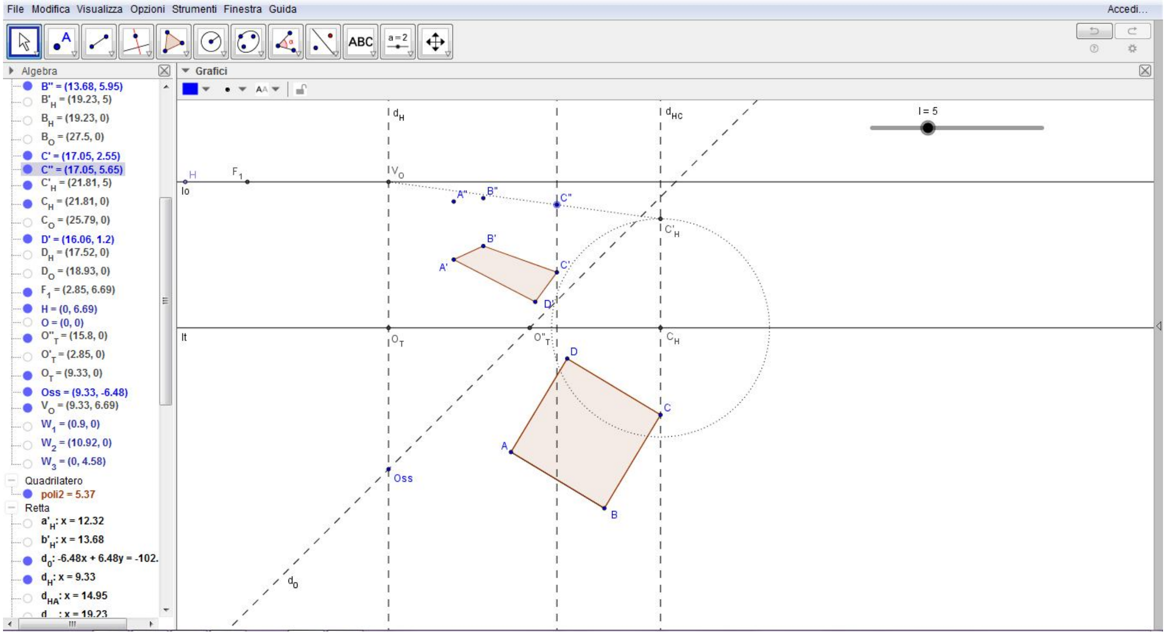
______*fine della procedura (SpVt)*

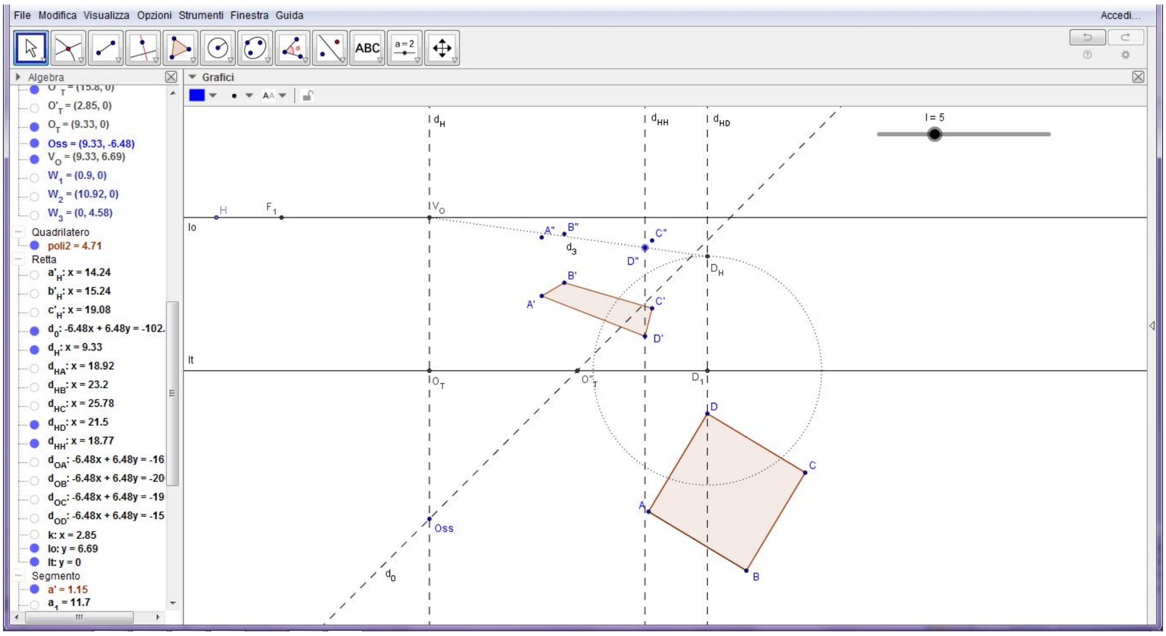
Per applicare la procedura *(SpVt)* al fine di disegnare il vertice A'' della faccia superiore del cubo, è necessario mostrare nuovamente la retta d_{HA} e il punto A_H che erano stati precedentemente nascosti.

11. Applicare la procedura *(SpVt)* su A', su B', su C' e su D', fissando così i vertici A'', B'', C'' e D'' che saranno determinanti per "chiudere" il cubo:

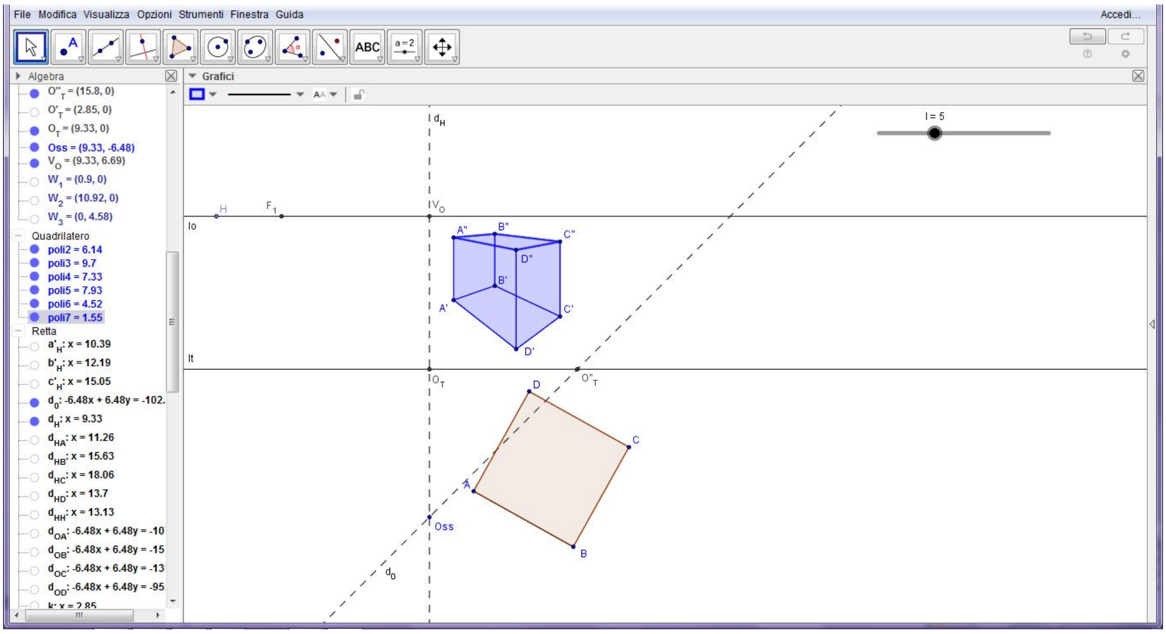

File Modifica Visualizza Opzioni Strumenti Finestra Guida
Accedi...
ABC
a = 2
Algebra
Grafici
Conica
c: (x - 9.33)² + y² = 41.94
d: (x - 14.95)² + y² = 25
Numero
l = 5
Poligono
poli1 = 25
Punto
A = (14.95, -5.69)
A' = (12.32, 3.13)
A'' = (12.32, 5.79)
A'H = (14.95, 5)
AH = (14.95, 0)
AO = (20.64, 0)
B = (19.23, -8.27)
B' = (13.68, 3.75)
BH = (19.23, 0)
BO = (27.5, 0)
C' = (17.05, 2.55)
CH = (21.81, 0)
CO = (25.79, 0)
D' = (16.06, 1.2)
DH = (17.52, 0)
DO = (18.93, 0)
F1 = (2.85, 6.69)
H = (0, 6.69)
O = (0, 0)
O''T = (15.8, 0)
O'T = (2.85, 0)
OT = (9.33, 0)
Oss = (9.33, -6.48)
VO = (9.33, 6.69)
W1 = (0.9, 0)
l = 5
dH
a'H
dHA
H
F1
VO
lo
a3
A''
A'H
B'
A'
C'
D'
lt
OT
AH
O''T
D
C
A
B
Oss
d0


File Modifica Visualizza Opzioni Strumenti Finestra Guida
Accedi...
ABC
a = 2
Algebra
Grafici
B'H = (19.23, 5)
BH = (19.23, 0)
BO = (27.5, 0)
C' = (17.05, 2.55)
CH = (21.81, 0)
CO = (25.79, 0)
D' = (16.06, 1.2)
DH = (17.52, 0)
DO = (18.93, 0)
F1 = (2.85, 6.69)
H = (0, 6.69)
O = (0, 0)
O''T = (15.8, 0)
O'T = (2.85, 0)
OT = (9.33, 0)
Oss = (9.33, -6.48)
VO = (9.33, 6.69)
W1 = (0.9, 0)
W2 = (10.92, 0)
W3 = (0, 4.58)
Quadrilatero
poli2 = 5.37
Retta
a'H: x = 12.32
b'H: x = 13.68
d0: -6.48x + 6.48y = -102.
dH: x = 9.33
dHA: x = 14.95
dHB: x = 19.23
dHC: x = 21.81
dHD: x = 17.52
l = 5
dH
b'H
dHB
H
F1
VO
lo
A''
B''
b3
B'H
B'
A'
C'
D'
lt
OT
O''T
BH
D
C
A
B
Oss
d0





12. Unendo opportunamente tutti i vertici del cubo trasformato si può finalmente osservare l'immagine prospettica del cubo:



Costruzione dell'ipercubo.

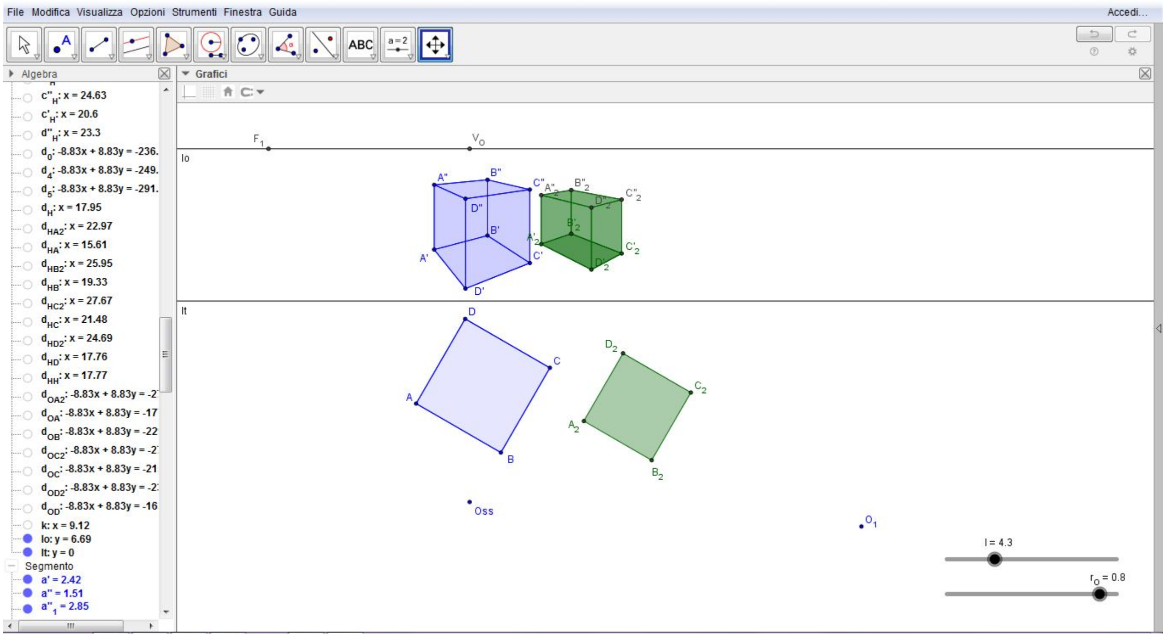
Per poter disegnare l'immagine dell'ipercubo bisogna adesso disegnare un altro cubo in pianta, e questo si traduce in un altro quadrato con i lati paralleli al primo. Infatti se si "guardano" due celle di un ipercubo da una direzione parallela agli otto spigoli delle due celle (che sono cubi), la proiezione che si ottiene è proprio quella di due quadrati con i lati a due e due paralleli.

Per disegnare con geogebra due quadrati con i lati a coppie paralleli si possono adottare diverse strategie, tra le quali, ad esempio, quella del quadrato $A_2B_2C_2D_2$ omotetico di $ABCD$ rispetto il punto O_{OM}. In questo caso il rapporto do omotetia tra $ABCD$ e $A_2B_2C_2D_2$ deve mantenersi inferiore all'unità, in quanto il cubo nella quarta dimensione (la cui pianta è $A_2B_2C_2D_2$) lo immaginiamo più distante in riferimento alla distanza a cui si trova il cubo iniziale (la cui pianta è $ABCD$).

È necessario, quindi, definire uno slider (che chiameremo con r_O) che varia i suoi valori da -1 ad 1. Successivamente con il comando "Omotetia" si trasformano i quattro vertici A, B, C, D negli omotetici (rispetto ad O_{OM}) A_2, B_2, C_2, D_2.

Si può disegnare il secondo cubo-cella dell'ipercubo nel piano delle trasformate ed infine, unendo opportunamente tutti i vertici dei due cubi si disegnano gli altri sei cubi-cella.

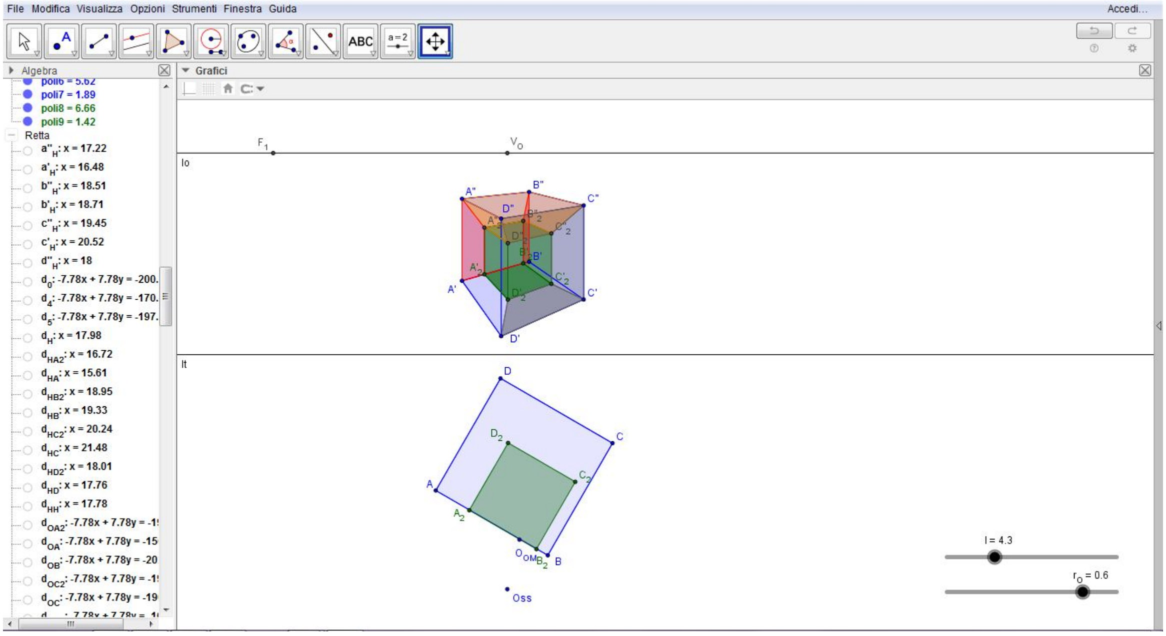
13. Definire lo slider r_O con valori estremi pari a -1 e +1 e step 0.1, e disegnare il punto O_{OM} nel *piano delle piante*. Operare la trasformazione "Omotetia" per i punti A, B, C, D rispetto al punto O_{OM} e trasformarli nei punti A_2, B_2, C_2, D_2.
14. Ripetendo ciò fatto nei punti 11. e 12. si può disegnare il cubo $A'_2B'_2C'_2D'_2A''_2B''_2C''_2D''_2$ nel piano delle trasformate.

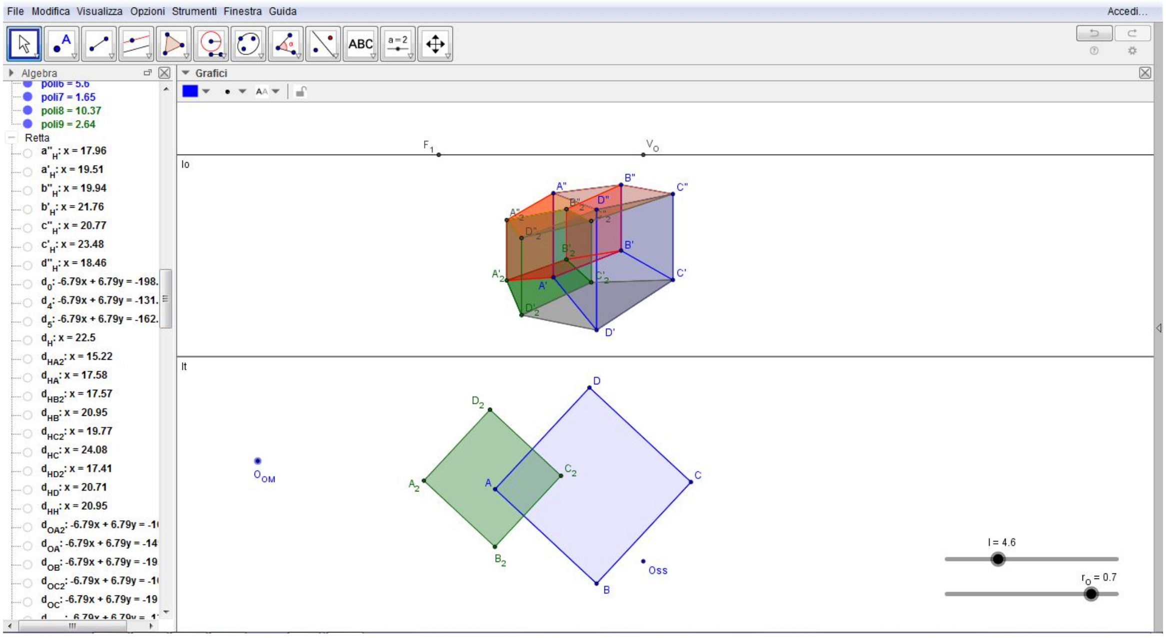


15. Infine bisogna individuare le facce da unire con le superfici che delimitano le celle dell'ipercubo. Ad esempio i quadrati che delimitano una cella sono: $A''B''B''_2A''_2$, $A''D''D''_2A''_2$, $D''C''C''_2D''_2$, $C''B''B''_2C''_2$, $A''_2B''_2C''_2D''_2$, $A''B''C''D''$.

Il grande vantaggio di tale costruzione consiste nell'aver generato un'immagine prospettica di un ipercubo con un software alla portata di tutti gli studenti e che già ha un ambio bacino di utenza. Spostando opportunamente il punto di osservazione Oss, il centro dell'omotetia O_{OM} oppure lo slider che rappresenta il rapporto di omotetia si può "vedere" l'ipercubo da diversi punti di vista.

L'aver costruito il politopo, inoltre, ha fornito agli studenti un potente strumento di analisi grafico-geometrica che consente loro di ampliare la capacità di vedere "oggetti" geometrici immaginari.





Bibliografia primaria

[ABB]	Abbott E. A.	Flatland. A romance of many dimensions. By the author A Square.	Seeley & Co. Square 8vo. London	1884
[ABBb]	Abbott E. A.	Flatlandia. Trad. M. d'Amico.	Adelphi	1966
[BAN]	Banchoff T. F.	Oltre la terza dimensione, Geometria, computer graphics e spazi multidimensionali. Prima edizione 1993	Zanichelli editore. Bologna.	1997
[BAR]	Barbarin P.	Sulla utilità di studiare la geometria non-euclidea.	Mat. pure appl., 1, 85-87. Città di Castello	1901
[BAW]	Bayerische Akademie der Wissenschaften	Algemeine Deutsche Biografien, Band 54, Biography by Moritz Cantor.	Bayerische Akademie der Wissenschaften	1896
[BEL]	Beltrami E.	Risoluzione del problema: «riportare i punti di una superficie sopra un piano in modo che linee geodetiche vengano rappresentate da linee rette».	Ann. mat., Roma, 7, 185-204 Opere mat., I, No. XIV, pp.262-280	1866
[BER]	Bertini E.	Sulla geometria degli spazi lineari in uno spazio ad *n* dimensioni.	Pend. Ist. Lomb. (2), 19, 855-862. Milano	1886

[BOLF]	Bolyai F.	Tentamen Juventutem studiosam in elementa Matheseos purae, elementaris ac sublimioris methodo intuitiva evidentiaque huic propria, introducendi ; cum appendice triplici.	Maros-Vásárhelyini, tomus I 1832, t. II 1833	1832-1833
[BOLJ]	Bolyai J.	Appendix, scientiam spatii absolute veram exibens : a veritate aut falsitate Axiomatis XI Euclidei (a priori haud unquam decidanda) indipendentem. Auctore Johanne Bolyai de eadem, Geometrarum in Excercitu Caesareo Regio Austriaco Castrensium Captaneo.	Maros-Vásárhely	1832
[BOU]	Bourbaki N.	Éléments d’histoire des mathématiques, traduzione italiana: *Elementi di storia della matematica*, traduzione di M. L. Vesentini Ottolenghi, Feltrinelli, Milano 1963	Hermann, Paris,	1960
[CASO]	Casorati F.	Discorso per l’inaugurazione degli studi universitari a Pavia il 16 novembre 1873. Opere scelte, vol.I (1951) vol.II (1952).	R. Istituto Lombardo, Milano	1951-1952
[CAS1885]	Cassani P.	Geometria pura euclidiana degli spazi a *n* dimensioni.	Atti Ateneo (9), 1 (1885), 440-447 ; 2 (1886), 121-135, 245-254. Venezia	1885-1886
[CAS1884]	Cassani P.	La geometria descrittiva a quattro dimensioni del prof. Giuseppe Veronese	Ateneo Veneto (7), 1, 301-314. Venezia	1884

[CAS1887]	Cassani P.	Geometria pura degli spazi superiori	Atti Ateneo (9), 2, 423-436. Venezia	1887
[CAS1894]	Cassani P.	Sulla geometria pura Euclideana ad *n* dimensioni	Atti Ist. Ven. (7), 5, 820-844. Venezia	1894
[CAST]	Castelnuovo G.	Ricerche di geometria della retta nello spazio a quattro dimensioni	Atti Ist. Ven. (7), 2, 855-901. Venezia	1891
[CAU]	Cauchy A.	Mémoire sur les lieux analytiques	Document (Gallica) Œuvres complètes, série 1, tome 10, 292-295 (volume) C. R., t. XXIV, p. 885. C.-R. Ac. Sc.	1847
[CAY1845]	Cayley A.	Chapters in the analytical geometry of (*n*) dimensions	Cambridge Math. J., 4, 119-127 Math. Papers, I. No. 11, 55-62	1845
[CAY1846]	Cayley A.	Collected Papers vol. I	Cambr. Dublin math. J.	1846
[CAY1866]	Cayley A.	Note on a Lobatchewsky's Imaginary Geometry	Phil. Mag., London (4), 29, 231-233 Coll. Papers, V, No. 362, pp.471-472	1866
[CAY1869]	Cayley A.	A memoir on Abstract Geometry		1869
[CAY1884]	Cayley A.	On the non-Euclidean plane geometry	Proc. Math. Soc., 37, 82-102. London	1884

[CAY1890]	Cayley A.	Non-Euclidian Geometry	Trans. Phil. Soc., 15 (1894), 37-61. Cambridge Proc. Phil. Soc., 7, 35 (Abstract) ; Read Jan. 27, 1890	1894, 1890
[CES]	Cesàro E.	Forme poliedriche regolari e semiregolari in tutti gli spazii	Mem. R. Acad. Sci. Lisboa	1888
[CHI]	Chizzoni F.	Sulla corrispondenza univoca fra le rette di uno spazio ordinario ed i punti di uno spazio lineare a quattro dimensioni	Atti Acc. Gioenia (3), 20. Catania	1888
[COX]	Coxeter H. S. M.	*Regular Polytopes* (2^a edizione Dover, 1973).	Publ. London	1948
[CUR]	Curjel H. W.	Notes on the regular hypersolids	Mess. Math., (2), 28, 190-191. Cambridge	1899
[DeP]	De Paolis R.	Sui fondamenti della geometria projettiva	Mem. Acc. Lincei, 9, 489-503. Roma	1881
[DEL]	Delbœuf J.	Are the dimensions of the physical world absolute ?	Monist, 4, 248-260. Chicago	1894
[EIN]	Einstein A.	Relatività: esposizione divulgativa.	Boringhieri	1967
[EnSt]	Engel F., Stäckel P.	Gauss, les deux Bolyai, et la géométrie non-euclidienne. (French trans. by L. Laugel.)	Bull. sci. math., (2), 21, 206-228. Paris	1897
[ENR1894]	Enriques F. J.	Sui fondamenti della geometria proiettiva	Rend. Ist. Lomb. (2), 27, 550-567. Milano	1894

[ENR1898]	Enriques F. J.	Lezioni di geometria proiettiva	Zanichelli. pp. ix+377. Bologna	1898
[EVE]	Everest M.	Philosophy and Fun of Algebra	London	1909
[FAN]	Fano G.	Lezioni di geometria non euclidea	Lit. Cippitelli. 8vo. pp.271. Roma	1898
[DrM]	Fechner G. (Dr. Mises)	Vier Paradoxa	L. Voss. Leipzig	1846
[FON]	Fontené G.	L'hyperspace à (*n-1*) dimensions. Propriétés métriques de la corrélation générale	Gauthiers Villars. 8vo. pp. xviii+133. Paris	1892
[FUL]	Fullerton G. S.	Space of four dimensions	J. spec. philos., 18, 113. St. Louis MO	1884
[GAU1828]	Gauss C. F.	Disquisitiones generales circa superficies curvas. [Abstract, by the Autor of 1828] Trans. English by Morehead and Hiltebeitel, 1902	Göttingen gel. Anz. 1828, No. 177, pp. 1761-1768 Werke, IV, 341-347	1828
[GAU1853]	Gauss C. F.	Recherches générales sur les surfaces courbes	Nouv. Ann. Math., Paris, 11, 195-252	1853
[GAU1867]	Gauss C. F.	Werke, *vol. V* Herausgegeben von der Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen	Göttingen	1867

[GAU1806]	Gauss C. F.,	Correspondence with Olbers, Enke and Struve. [Gauss to Olbers: 30 July, 1806, 28 Apr., 1817, 3 May, 1827; to Encke: 1Feb., 1841; to Struve: 11 Dec., 1846]	Gauss' Werke, VIII, pp.165, 177, 188; 232; 239.	1806-1846
[GRA]	Grassmann H. G.	Gesammelte mathematische und physikalische Werke. Esten Bandes erster Theil: Die Ausdhenungslehre von 1844 und Die geometrische Analyse, unter der Mitwirkung von Eduard Study herausgegeben von Friedrich Engel	Teubner, Leipzig	1894
[GRV]	Graves R. P.	*Life of sir William Hamilton*, 3 vv.	Dublin University Press	1882 – 1889
[HAF]	Haft F.	La cuarta dimension, su historia y su mas moderna fundacion	An. Soc. Cient. Argentina, 30, 337-350. Buenos Ayres	1890
[HAL1877]	Halsted G. B.	The new ideas about space	Pop. Sci. Mon., New York N.Y., 11, 364-365	1877
[HAL1895a]	Halsted G. B.	Biografy of Arthur Cayley	Amer. Math. Mon. 2, 102-106. Kidder, MO Review of Reviews, June, 1895, pp.693-694	1895
[HAL1895b]	Halsted G. B.	Biografy of Lobachevsky	Amer. Math. Mon. 2, 137-139. Kidder, MO	1895

[HAL1895c]	Halsted G. B.	The Helmholtz-Lie deduction of non-euclidean geometry	Math. Messenger, 8	1895
[HAL1898]	Halsted G. B.	Newcomb's Philosophy of Hyperspace	Science, 7, 231-233. New York – NY	1898
[HAL1900]	Halsted G. B.	Non-euclidean geometry for teachers	Pop. Astr., 8, 267-252. Northfield – Minn.	1900
[HAL1897]	Hathaway A. S.	Quaternions as numbers of four-dimensional space	Bull. Amer. Math. Soc. (2), 4, 54-57. New York N.Y.	1897
[HAL1902]	Hathaway A. S.	Quaternion space	Trans. Amer. Math. Soc., 3, 46-59. New York – N.Y.	1902
[HER]	Herbart J. F.	Über philosophisches Studium, *vol. II*.	Heinrich Dieterich, Göttingen	1807
[HIL]	Hilbert D.	Les principles fondamentales de la géométrie. Traduit par L. Laugel	Ann. sci. Éc. Norm., (3), 17, 103-209. Paris	1900
[HIN1884a]	Hinton C. H.	Scientific Romances	Swan Sonnenschein. Cr. London	1884
[HIN1884b]	Hinton C. H.	What is the fourth dimension?	Swan Sonnenschein. Cr. London	1884
[HIN1886]	Hinton C. H.	Scientific romances. I. What is the Fourth Dimension? pp.1-32 II. On the Education of the Imagination. pp.3-22. Many Dimensions. pp.23-44	Swan Sonnenschein. Cr. 8vo. London	1886

[HIN1888]	Hinton C. H.	A new era of thought	Swan Sonnenschein. London	1888
[HIN1902]	Hinton C. H.	The recognition of the fourth dimension	Bull. Phil. Soc., 14, 179-203. Washington – D.C.	1902
[HOP1881b]	Hoppe R.	Regelmäßige linear begrenzte Figuren von vier Dimensionen	Arch. Math. und Phys., 67, pp.29-44. Leipzig	
[HOP1881a]	Hoppe R.	Über den Winkel von *n* Dimensionen	Arch. Math. und Phys., 66, p.448. Leipzig	1882
[HOP1882a]	Hoppe R.	Drei Sätze für Inhaltsberechnung in der Mehrdimensionengeometrie	Arch. Math., 69, 385-395. Leipzig	1882
[HOP1882b]	Hoppe R.	Numerische Berechnung der Winkel von vier Dimensionen	Arch. Math., 69, 278-287. Leipzig	1882
[HOP1882c]	Hoppe R.	Relation zwischen fünf Elementartetratopen mit vier unabhängigen Grössen	Arch. Math., 69, 287-297. Leipzig	1882
[HOP1882d]	Hoppe R.	Tetratop auf beliebiger Basis	Arch. Math., 69, 297-307. Leipzig	1882
[HUX]	Huxley T. H.	Fortnightly Review June 1869, vol.5, p. 667	London	1869
[HYS1896]	Hyslop J. D.	The fourth dimension of space	Phil. Rev., 5, 352-370. Boston	1896
[HYS1891]	Hyslop J. H.	Helmholtz's theory of space-perception	Mind, 16, 54-79. London	1891

[ISE]	Isely L.	La géométrie non-euclidienne	Bull. Soc. sc. nat., 24 (1895-96), 137-148 ; 25 (1896-97), 253-255. Neuchâtel	1895
[JAC]	Jacobi C.G.J.	Gesammelte Werke, Vol. III Herausgegeben von K. Weierstrass,	Georg Reimer, Berlin,	1884
[JOU]	Jouffret E.	Traité élémentaire de géométrie à quatre dimensions.	Gauthier Villars.	1903
[KEN]	Kennon L.	The new ideas about space	Pop. Sci. Mon., 11, 749. New York N.Y.	1877
[LAG]	Lagrange J.-L.	Théorie des fonctions analytiques, "Seconde édition" revue et augmentée par l'Auteur, M.me V.e Courcier,	Imprimeur-Libraire pour les Mathématiques, Paris,	1813
[LAN]	Land J.	Kant's space and modern mathematics	Mind, 2, 38-46. London.	1877
[LAS]	Lasker E.	Metrical relations of plane spaces of *n* dimensions	Nature, 52, 340-343. London	1895
[LOB1834]	Lobačevskij N. I.	On the foundations of geometry Trans. german, 1898		1834
[LOB1835]	Lobačevskij N. I.	Imaginary geometry Trans. german, 1904	Kazañ, Zap. Univ.	1835

[LOB1900a]	Lobačevskij N. I.	Nouveaux principes de la géométrie avec une théorie complète des parallèles. Traduit du russe pour la première fois par F. Mallieux	Mém. Soc. roy. sci. (3), 2, No.5, pp.101; 3, No.2, pp.32. Liége	1900
[LOB1900b]	Lobačevskij N. I.	Recherches géométriques sur la théorie des parallèles, suivies d'extraits de la correspondence de Gauss et Schumacher, suivi de: Helmholtz, 1867	Hermann. Paris	1900
[LOB1901]	Lobačevskij N. I.	Nouveaux principes de la géométrie avec une théorie complète des paralleles	F. Hayez. 8 Vo. pp.132. Bruxelles	1901
[LOR1887a]	Loria G.	Il passato ed il presente delle principali teorie geometriche. Monografia storica	4to. pp.52 (pp.42-52). Torino	1887
[LOR1887b]	Loria G.	Le definizioni di spazio a *n* dimensioni e l'ipotesi di continuità del nostro spazio secondo le ricerche di Georgio Cantor	Giorn. mat., 25, 97-108. Napoli	1887
[LOR]	Loria G.	Eugenio Beltrami e le sue opere matematiche. [Con ritratto]	Bibl. Math., 2, 392-440. Leipzig	1901
[LOV1900]	Lovett E. O.	Note on geometry of four dimensions	Bull. Amer. Math. Soc. (2), 7, 88-100. New York – N.Y.	1900
[LOV1901]	Lovett E. O.	Sur la géométrie à *n* dimensions	J. math., (5), 7, 259-303. Paris	1901

[MAN1901]	Manning H. P.	Non-Euclidean Geometry	Ginn & Co., The Athenæum Press. 8vo. pp. vi+95. 3s. 6d. Boston, U.S.A.	1901
[MAN1910]	Manning H. P.	The fourth dimension simply explained. Reprint Dover, 1956	Munn	1910
[MAN1914]	Manning H. P.	Geometry of four dimensions Reprint Dover, 1956		1914
[MAS1901]	Mansion P.	Sur la géométrie non-euclidienne chez Gauss	Ann. Soc. scient., 25A, 144-145. Bruxelles	1901
[MAS1901]	Mansion P.	Sur la découverte de la géométrie non-euclidienne par Jean Bolyai	Ann. Soc. scient., 26A, 146-147. Bruxelles	1902
[MOE]	Möbius A. F.	Der baryzentrische Calcul		1827
[NEW1877]	Newcomb S.	Elementary theorems relating to the geometry of a space of three dimensions and of uniform positive curvature in the fourth dimension.	J. Math., 83, 293-299. Berlin	1877
[NEW1878a]	Newcomb S.	Note on a class of transformations which surfaces may undergo in space of more than three dimensions.	*American Journal of Mathematics*, 1	1878
[NEW1898b]	Newcomb S.	The philosophy of hyperspace *[Ristampato nel 1998]*	Bull. Amer. Math Soc. (2), 4, 187-195. New York - NY	1898

[PIE]	Pieri M.	Un sistema di postulati per la geometria projettiva astratta degli iperspazi	Rev. mathém., 6, 9-16. Torino	1896
[PidF]	Piero della Francesca	De perspectiva pingendi		1479-1482
[PLU1846]	Plücker J.	System der Geometrie des Raumes in neuer analytischer Behandlungsweise	Düsseldorf	1846
[PLU1865]	Plücker J.	On a new Geometry of Space. Philosophical Transactions of the Royal Society of London, 155.	Philosophical Transactions of the Royal Society of London.	1865
[POI1887]	Poincaré J. H.	Sur les hypothèses fondamentales de la géométrie	Bull. Soc. math., 15, 203-216. Paris	1887
[POI1891]	Poincaré J. H.	Les géométries non-euclideennes	Rev. gén. sci., 2, No.23. Paris	1891
[POI1892]	Poincaré J. H.	Non-euclidean geometry	Nature, 45, 404-407. London	1892
[POI1895]	Poincaré J. H.	L'espace et la géométrie	Rev. métaphysique, 3, 631-646. Paris	1895
[POI1902]	Poincaré J. H.	La science et l'hypothèse	Flammarion. pp. 284. Paris	1902
[POI1992i]	Poincaré J. H.	Il valore della scienza. Prefazione di Jules Vuillemin Traduzione di G. Ferraro	Edizioni Dedalo, Bari	1992

[POI2003i]	Poincaré J. H.	La scienza e l'ipotesi Introduzione, traduzione, note e apparati di C. Sinigaglia	Bompiani, Milano	2003
[RIC]	Ricci G.	Sulla teoria degli iperspazi	Rend. Acc. Lincei (5), 4_2, 232-237	1895
[RIE1851]	Riemann B.	Grundlagen für eine allgemeine Theorie der Funktionen einer veränderlichen complexen Grösse, Inauguraldissertation. Werke, pp.3-48	Göttingen	1851
[RIE1853]	Riemann B.	Neue mathematische Principien der Naturphilosophie. Werke, pp.528-532	Göttingen	1853
[RIE1854]	Riemann B.	Über die Hypothesen, welke der Geometrie zu Grunde liegen, Abhandlungen der Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen, 13 (1868); Werke, pp.272-287. Engl. trasl. [Spivak 1970/1979, pp.135-153]	Göttingen	1854
[RIE1876]	Riemann B.	Gesammelte mathematische Werke und wissenschaftlicher Nachlaß, a cura di R. Dedekind e H. Weber/Collected Papers successivo all'uscita di Raghavan Narasimhan	Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-Teubner, Leipzig	1876
[RIE1895]	Riemann B.	Sur les hypothèses qui servent de fondement à la géométrie (traduit par J. Hoüel)	Hermann. Paris	1895

[RIE2012]	Riemann B.	Sulle ipotesi che stanno alla base della geometria. Traduzione e cura di Renato Pettoello Prima edizione 1994	Bollati Boringhieri, Torino.	2012
[ROA]	Rosati C.	Sulle superficie di Veronese e di Steiner	Atti Acc. sc., 35, 12-19. Torino	1900
[SCH1858]	Schläfli L.	On the multiple integral $\int^n dx\, dy \ldots dz$, whose limits are $p_1 = a_1x + b_1y + \cdots + h_1z > 0$, $p_2 > 0, \ldots, p_n > 0$; and $x^2 + y^2 + \cdots + z^2 < 1$ Trans. by A. Cayley (1860)	Q. J. Math., London, 2, 269-301; 3 (1860), 54-68, 97-108	1858
[SCH1901]	Schläfli L.	Theorie der vielfachen Kontinuität. Herausg. in Auftr. der Denkschriften-Kommission des schweiz. naturforsch. Ges. von J. H. Graf.	N. Denksehr. Schweiz. Ges. Natw., 38. 4to. pp. iv+239	1901
[SCH1950]	Schläfli L.	*Gesammelte Mathematische Abhandlungen* 3 vol.	Birkhäuser, Springer Basel AG	1950–1956
[SCL1882]	Schlegel V.	Quelques théorèmes de géométrie à *n* dimensions	Bull. Soc. math., 10, 172-207 Paris	1882
[SCL1886]	Schlegel V.	Projectionsmodelle der vier ersten vier-dimensionalen Körper	Brill. Darmstadt	1886

[SCL1887]	Schlegel V.	Sur un théorème de géométrie à quatre dimensions	C.–R. Assoc. Franç. avanc. sc., 16, 264-266. Toulouse	1887
[SCL1891]	Schlegel V.	Sur une méthode pour représenter dans le plan les solides homogènes à *n* dimensions	Rend. Circ. Mat., 5, 1-8, 1 pl. Palermo	1891
[SCL1900]	Schlegel V.	Sur le développement et l'état acque del a géométrie à *n* dimensions.	Enseign. math., 2, 77-114. Paris	1900
[SCHU]	Schoute P. H.	Sur trois division régulières de l'espace à *n* dimensions	C. R. Assoc. Franç. avanc. sc., 23, 27-260. Caen	1895
[SCHB]	Schubert H.	The Fourth dimension	Monist, 3, 402-449. Chicago	1893
[SEG1961]	Segre C.	Opere, a cura della Unione Matematica Italiana, Volume IV, (1963); vol. III (1961)	Edizione Cremonese, Roma.	1961-1963
[SEG1883a]	Segre C.	*Studio delle quadriche in uno spazio lineare ad un numero qualunque di dimensioni*. Opere, v. III, U.M.I. 1961, pp.25-126.	Memorie della R. Accademia delle Scienze di Torino, (2), 36, 3-86. http://www.bdim.eu/item?id=GM_Segre	1883
[SEG1883b]	Segre C.	Sulle geometrie metriche dei complessi lineari e delle sfere e sulle loro mutue analogie	Atti Acc. sc., 19, 159-187. Torino	1883
[SEG1884b]	Segre C.	Ricerche sui fasci di coni quadratici in uno spazio lineare ad un numero qualunque di dimensioni	Atti Acc. sc., 19, 878-897. Torino	1884

[SEG1884c]	Segre C.	Studio sulle quadriche in uno spazio lineare ad un numero qualunque di dimensioni	Atti Acc. sc., 36, 3-86. Torino	1884
[SEG1884d]	Segre C.	Sulla teoria e sulla classificazione delle omografie in uno spazio lineare ad un numero qualunque di dimensioni	Mem. Acc. Lincei (3), 19, 127-148. Roma	1884
[SEG1884e]	Segre C.	Sulle rigate razionali in uno spazio lineare qualunque	Atti Acc. sc., 19, 355-373. Torino	1884
S[EG1884a]	Segre C.	Étude des différentes surfaces du 4me ordre à conique double ou cuspidale (générale ou décomposée) considérées comme des projections de l'intersection de deux variétés quadriques de l'espace à quatre dimensions	Math. Ann., 24, 313-444. Leipzig	1884
[SEG1885]	Segre C.	Considerazioni intorno alla geometria delle coniche di un piano e alla sua rappresentazione sulla geometria dei complessi lineari di rette	Atti Acc. sc., 20, 487-504. Torino	1885
[SEG1887]	Segre C.	Sur un théorème de la géométrie à *n* dimensions. [Condotion that a variety of *n* dimensions be linear.]	Math. Ann., 30, 308. Leipzig	1887
[SEG1888]	Segre C.	Sulle varietà cubiche dello spazio a quattro dimensioni e su certi sistemi di rette e certe superficie dello spazio ordinario	Mem. Acc. sc. (2), 39, 3-48. Torino	1888

[SEG1890]	Segre C.	Un nuovo campo di ricerche geometriche. Saggio.	Atti Acc. sc., 25, 276-301, 430-457 ; 26, 35-71, 592-612. Torino	1890
[SEG1891a]	Segre C.	1. Su alcuni indirizzi nelle investigazioni geometriche. 2. Peano : Osservazioni sull'articolo precedente. *Ibid., 66-69* 3. Segre : Una dichiarazione. 4. Peano : Risposta, 154-159.	Riv. mat., 1, 42-66 (§§ 8-10). Torino	1891
[SEG1891b]	Segre C.	Sulle varietà che rappresentano le coppie di punti di due piani o spazi	Rend., Circ. Mat., 5, 192-204. Palermo	1891
[SEG1892]	Segre C.	Le rappresentazioni reali delle forme complesse e gli enti iperalgebrici	Math. Ann., 40, 413-467. Leipzig	1892
[SEG1957]	Segre C.	1883, Opere a cura della Unione Matematica Italiana,	Edizione Cremonese, Roma	1957
[SeLo]	Segre C. e Loria G.	Sur les différentes espèces de complexes du 2e degré des droites qui coupent harmoniquement deux surfaces du second ordre.	Math. Annalen 23, p. 213-234	1883
[SeLo1883c]	Segre C., Loria G.	Sur les différentes espèces de complexes du 2e degré des droites qui coupent harmoniquement deux surfaces du second ordre.	Math. Annalen 23 (1883), p. 213-234	1883
[SOM]	Sommerville D. M. Y.	A visit from the fourth dimension	College Echoes, St. Andrews Univ. Mag., 12, 166-168. Cupar, Fife, U.K.	1901

[STO1882]	Story W. E.	On the Non-Euclidean geometry	Amer. J. Math., 5, 180-211. Baltimore, MD	1882
[STO1897]	Story W. E.	Hyperspace and non-euclidean geometry	Math. Review, 1, 169-184	1897
[STR1880a]	Stringham W. I.	Generalisation for *n*-fold space of Euler's equations for polyedra	Johns Hopkins Univ. Circ., 3. Baltimore. Md., Amer.	1880
[STR1880b]	Stringham W. I.	Geometrical figures in space of four dimensions. (Two papers.)	Johns Hopkins Univ. Circ., 3. Baltimore. Md., Amer.	1880
[STR1880c]	Stringham W. I.	Regular figures in *n*-dimensional space.	Johns Hopkins Univ., American Journal of Mathematics, Circ., 3, Baltimore. Md., Amer.	1880
[STR1880d]	Stringham W. I.	Rotation in four-dimensional space	Johns Hopkins Univ. Circ., 4 and 5. Baltimore. Md., Amer.	1880
[STR1884]	Stringham W. I.	On the rotation of a rigid system in space of four dimensions.	Proc. Amer. Assoc. Adv. Sci., 33, 55-56	1884
[STR1901]	Stringham W. I.	On the geometry of planes in a parabolic space of four dimensions	Trans. Amer. Math. Soc., 2, 183-214. New York N. Y.	1901
[SYL1869]	Sylvester J. J.	A plea for the mathematician in *Nature*, 1,		1869
[VER1881a]	Veronese G.	Alcuni teoremi sulla geometria a *n* dimensioni	Trans. Acc. Lincei (3), 5, 333-338. Roma	1881

[VER1881b]	Veronese G.	Behandlung der projectivischen Verhältnisse der Räume von verschiendenen Dimensionen durch das Princip des Projieirens und Schneidens	Math. Ann. 19, 161-234. Leipzig	1881
[VER1881c]	Veronese G.	Die Anzahl der unabhängigen Gleichungen, die zwischen den allgemeinen Charakteren einer Curve im Raume von *n* Dimensionen stattfinden	Math. Ann., 18, 448. Leipzig	1881
[VER1882]	Veronese G.	Sulla geometria descrittiva a quattro dimensioni	Atti Ist. Ven. (5), 8, 981-1025. Venezia	1882
[VER1884a]	Veronese G.	Di una costruzione della superficie del 4° ordine dotata di una conica doppia	Atti Ist. Ven. (6), 2, 1821-1842. Venezia	1884
[VER1884b]	Veronese G.	La superficie omaloide normale a due dimensioni e del quarto ordine dello spazio a cinque dimensioni e le sue projezioni nel piano e nello spazio ordinario	Mem. Acc. Lincei (3), 19, 344-371. Roma	1884
[VER1891]	Veronese G.	Fondamenti di geometria a più dimensioni ed a più spezie di unità rettilinee esposti in forma elementare	Tipografia del seminario. pp. xlvii+628. Padova	1891

[VER1894]	Veronese G.	Grundzüge der Geometrie von mehreren Dimensionen und mehreren Arten geradliniger Einheiten in elementaren Form entwickelt [Trans. of 1891 by Adolf Schepp.] A discussion between Veronese and Peano was carried on by letters in Riv. Mat., 1, 267-269, Torino and Rend. Circ. mat., 6 (1892), 40-41, 42-47, 160, Palermo	Arch. Math., (2), 14 (1895), 28, Leipzig; Göttingische gel. Anz., 1895, 929-939 ; Rev. gen. sci., 6 (1895), 788. Paris Zs. Math., 42, 63-67, Leipzig ; MonHofte Math. Phys., 8, 22, Wien	1894
[HEL1866]	Von Helmholtz H.	Ueber die thatsächlichen Grundlagen der Geometrie	Verh. Naturh.-med. Ver. Heidelberg, 4, 197-202	1866
[HEL1877]	Von Helmholtz H.	Les axioms de la géométrie, leur origine et leur signification.	Rev. Scient., 12 (1877), 1197-1207, Paris	1877
[HEL1884]	Von Helmholtz H.	Über Ursprung und Bedeutung der geometrischen Axiome Trad. italiana di A. Loinger del testo originale tedesco.	Vorträge und Reden	1884
[HEL1967]	Von Helmholtz H.	*Handbuch der physiologischen Optik* [*Manuale di ottica fisiologica], 1867,* Opere di Hermann von Helmholtz, (a cura di V. Cappelletti)	UTET, Torino	1967
[WHY]	Whythoff W. A.	*A relation between the polytopes of the C600-family*, Proceedings of the Section of Sciences.	Koninklijke Akademie van Wetenschappen te Amsterdam, 20	1918

[WIL]	Williams H. W.	The fourth dimension	Trans. N. Zeal. Inst., 34, 507-513. Wellington	1902
[WOO]	Woods F. S.	Lobachevsky's geometry	Bull. Amer. Math. Soc. (2), 6, 339-344, 443-452. New York, N.Y.	1900
[ZOE1880]	Zöllner J. C. F.	Transcendental Physics. An account of experimental investigations. From the scientific treaties of J. C. F. Z. traslated from the German, with a preface and appendices, by Charles Carleton Massey	W. H. Harrison. 8vo. Pp. XLVIII + 266. 2nd ed., 1882. 8vo. pp. XLVIII+266. London	1880
[ZOE1878a]	Zöllner J.C.F.	On space of four dimensions	Q. J. Sci., (2), 8, pp.227-237. London	1878
[ZOE1878b]	Zöllner J.C.F.	*Transzendentale Physik*, (trad. inglese del 1880)	Leipzig	1878
[ZOE1881]	Zöllner J.C.F.	Naturwissenschaft und Christliche Offenbarung	Leipzig	1881

Bibliografia secondaria

[ABA]	Abbagnano N.	Storia della filosofia. *Vol. 1.* La filosofia nel romanticismo, *IV edizione*	TEA, Milano	1995
[ACK]	Ackermann S. L.	Behind the looking glass	Cambridge Scholars publishing	2008
[BAN]	Banchoff T. F.	Oltre la terza dimensione, Geometria, computer graphics e spazi multidimensionali. (prima edizione 1993)	Zanichelli editore. Bologna.	1997
[BAR]	Bartocci C.	Una piramide di problemi. (prima edizione 2012)	Raffaello Cortina Editore, Milano.	2016
[BEN]	Bernardo A.	Helmholtz: i fatti della geometria	http://www.matematicamente.it/cultura/storia-della-matematica/helmholtz-i-fatti-della-geometria/	
[BGT]	Boi L., Giacardi L., Tazzioli R.	La découverte de la Géométrie non euclidienne sur la pseudosphère.	Blanchard, Paris	1998

[BIE]	Biermann K.-R.	Reinhold Hoppe Neue Deutsche Biographie, (NDB), 9, pp. 614–615	Duncker & Humblot, Berlin	1972
[BotTaz]	Bottazzini U., Tazzioli R.	Naturphilosophie and its role in riemann's mathematics.	Revue d'histoire des mathématiques n.1, pag.3-38	1995
[BOY]	Boyer C. B.	*Storia della matematica*	Arnoldo Mondadori Editore, Milano	1990
[BrDS]	Brigaglia A., Di Sieno S.	L'opera politica di Luigi Cremona attraverso la sua corrispondenza. Prima parte	La Matematica nella Società e nella Cultura, rivista della Unione Matematica Italiana, (I), Vol. II, 12/ 2009, pp. 353–388, Bologna	2009
[BRI1994]	Brigaglia A.	Giuseppe Veronese e la geometria iperspaziale in Italia.	Le scienze matematiche nel Veneto dell'Ottocento, Atti del III seminario di storia delle scienze, pp.231-261 Istituto Veneto di Scienze, Lettere ed Arti, Venezia	1994
[BRI2013]	Brigaglia A.	Per una biografia scientifica di Corrado Segre	La Matematica nella Società e nella Cultura, rivista della Unione Matematica Italiana, (I), Vol. VI, 12/2013, pagg. 415-474, Bologna	2013

[BUR]	Burzio F.	Lagrange. Nuova edizione con prefazione di L. Pepe, *Lagrange e i suoi biografi*, Utet, Torino, 1993. Pp. XII-XLIII	Utet, Torino	1942
[CAM]	Cantor M.	Algemeine Deutsche Biografien, Band 54, S.29—31. Biography by, Moritz Cantor	Bayerische Akademie der Wissenschaften	1896
[CAN1999]	Cantù P.	Giuseppe Veronese e i fondamenti della geometria	Edizioni Unicopli, Milano	1999
[CAN2010]	Cantù P.	Grassmann's epistemology: multiplication and constructivism	H.-J. Petsche, A. C. Lewis, J. Liesen and S. Russ (eds.): From past to future: Grassmann's work in context, pp. 91-100, Basel	2010
[CER]	Cerroni C.	*Dispensa su "Cenni storici sui quaternioni"*.	http://math.unipa.it/~cerroni/quaternioni-ottonioni.zip Università degli studi di Palermo	
[CGP]	Carbone L., Gatto R., Palladino F.	Una comunità e un caso di frontiera. L'epistolario Cremona – Cesàro e i materiali correlati	Liguori.	2002

[CRA]	Craig E.	"Rudolf Hermann Lotze" in: Routledge Encyclopedia of Philosophy, vol. 5. Pp. 839–842.	Ed. Routledge	1998
[CRI]	Crilly T.	Arthur Cayley. Mathematician laureate of the Victorian age.	Johns Hopkins University Press	2006
[CRO]	Crowe M. J.	A History of Vector Analysis (prima ediz. University of Notre Dame Press, London, 1967)	Dover, Mineola (NY)	1994
[DED2009]	Dedò M.	Forme. Simmetria e topologia (Prima ediz. 1999)	Decibel – Zanichelli. Bologna	2009
[DED2015]	Dedò M.	Visualizzare la quarta dimensione	Xla tangente	2015
[DES]	Delsedime P.	Cassani, Pietro.	Dizionario Biografico degli Italiani - Volume 21	1978
[DRO]	Dronke A.	Julius Plücker	Bonn	1871
[ENE]	Eneström, G. H.	Nekrologe. Victor Schlegel (1843–1905).	Bibliotheca mathematica. Leipzig, B. G. Teubner. p. 421.	1905
[FAM]	Familton J. C.	Quaternions: a history of complex commutative rotation groups in theoretical physics.	ArXiv:1504.04885v1	2015
[FeSa]	Fearneley-Sander D.	Hermann Grassmann and the creation of linear algebra	American Mathematical Monthly, 86, pp. 809 – 817	1979

[FRE]	Freguglia P.	Hermann Grassmann's work and the Peano school,	H.-J. Petsche, A. C. Lewis, J. Liesen and S. Russ (eds.): From past to future: Grassmann's work in context, pp. 185-195, Basel	2010
[GAT]	Gatto R.	Lettere di Luigi Cremona a Enrico Betti	M. Menghini (ed.), La corrispondenza di Luigi Cremona, III, Quaderni del Pristem.	1996
[GRF1905]	Graf J.H.	Briefwechsel von Ludwig Schläfli mit Arthur Cayley, ristampa da Kessinger Publishing Co., 2010	Buchdr. K.J. Wyss Bern	1905
[GRF1915]	Graf J.H.	La correspondance entre Ludwig Schläfli et des mathématiciens italiens de son époque.	*Bollettino di Bibliografia e Storia delle Matematiche*, 17, 1915, pp. 36 – 40 e 81 – 86; 18, 1916, pp. 21 – 35, 49 – 64, 81 – 83, 113 – 123; 19, 1917, pp. 9 – 14, 43 – 49, 67 – 73	1915-1917
[HAN]	Hankins T. L.	Sir William Rowan Hamilton.	John Hopkins Press, Baltimore, MD	1980
[HEN]	Henderson L. D.	The Fourth Dimension and non-Euclidean Geometry in modern Art.	Princeton University Press	1983

[HES]	Hestenes D.	*New Foundations of Classical Mechanics*.	Kluwer Adademic Publishers, Dordrecht	1986
[IbT]	Ibañez Torres R.	La quarta dimensione	RBA, Milano	2010
[KAK]	Kaku M.	Hyperspace	Anchor Books	1994
[KEL]	Kellerhals R.	Ludwig Schläfli – ein genialer Schweizer Mathematiker	*Elemente der Mathematik*, pp. 165–177	2010
[KLE]	Klein F.	Development of Mathematics in the 19th century. Trad. M. Ackermann.	Math. Sci. Press	1979
[KRA]	Kragh H.	Geometry and Astronomy: pre-Einstein speculations of non-euclidean space	ArXiv https://arxiv.org/ftp/arxiv/papers/1205/1205.4909.pdf	2012
[LOR]	Loria G.	Passato e presente delle principali teorie geometriche.	Clausen	1896
[MaSp]	Manara C. F., Spoglianti M.	La idea di iperspazio. Una dimenticata polemica tra G. Peano, C. Segre e G. Veronese.	Atti e memoria della Accademia Nazionale di Scienze, Lettere e Arti di Modena. Serie VI, vol. XIX. Acc. Naz. Di Sc. Lett. E Ar. Di Modena	1977
[McH]	McHale D.	George Boole: his life and work.	Publ. Dublin,	1985

[MIC]	Michalowicz K.	Mary Everest Boole.	R. Calinger (ed.), Vita Mathematica The Math. Ass. of Am., pp. 291 – 298	1996
[MOY]	Moyer A. E.	A Scientist's Voice in American Culture.	University of California Press.	1992
[MSW]	Mumford D., Series C., Wright D.	Indra's Pearls: The Vision of Felix Klein.	Cambridge University Press	2002
[OCR2005]	O'Connor J.J., Robertson E.F.	James Joseph Sylvester in "MacTutor History of Mathematics archive"	http://www-history.mcs.st-and.ac.uk/Biographies/Sylvester.html	2005
[OCR2010]	O'Connor J.J., Robertson E.F.	Pieter Hendrik Schoute in "MacTutor History of Mathematics archive"	http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/Biographies/Schoute.html	2010
[PAR]	Parshall K. H.	James Joseph Sylvester: Life and Work in Letters.	Clarendon Press	1998
[PaRo]	Parshall K. H., Rowe D. E.	The emergence of the American mathematical research community, 1876-1900: J. J. Sylvester, Felix Klein, and E. H. Moore.	Providence	1994
[PETS]	Petsche H.-J.	*Hermann Grassmann – Biography.* Transl. By M Minnes.	Basilea.	2009
[PETT]	Pettoello R.	Introduzione a Herbart.	Laterza, Roma-Bari	1988

[PIC]	Pickover C.	Il nastro di Möbius.	Apogeo, Milano	2006
[PoB2007]	Polo-Blanco I.	Theory and History of Geometric Models	Rijksuniversiteit Groningen	2007
[PoB2008]	Polo-Blanco I.	Alicia Boole Stott, a geometer in higher dimension.	Historia Mathematica, 35, pp. 123-139	2008
[RM]		Vizi virtuali, virtù veneziane. http://www.rudimathematici.com/archivio/184.pdf#page=7	Rudi Mathematici, n. 184, maggio 2014, pp.7-9	2014
[ROB]	Robbin A.	Shadows of Reality: the fourth dimension in relativity, cubism and modern thought.	Yale University Press, New Haven – CT, USA	2006
[ROE]	Roberts Siobhan	Il re dello spazio infinito. Storia dell'uomo che salvo la geometria.	Rizzoli. Milano	2006
[ROS]	Rosenfeld B. A.	A History of non Euclidean Geometry	Springer	1988
[RUK]	Rucker R.	La quarta dimensione Prima ed. It. 1994 Trad. Di G. Longo Titolo orig.: "The Fourth Dimension, A Guided Tour of the Higher Universe" -	Gli Adelphi	2011

[SCHB]	Schubring G. (ed.)	Hermann Gunther Grassmann (1809 – 1877): Visionary Mathemtician, Scientist and Neohumanist Scholar.	Schubring G. (ed.), Kluwer	1996
[SCHO]	Scholz E.	Herbart's influence on Bernhard Riemann.	Historia mathematica, 9, 413 – 440	1982
[SIE]	Siegel W.	Particelle, stringhe e altro	Di Renzo Editore	2008
[STE]	Stewart I.	Note su Abbott E. A., The annoted Flatland	Basic Books	2002
[SZP]	Szpiro G. G.	L'enigma di Poincaré. L'enigma e la misteriosa storia del matematico che l'ha dimostrata.	Apogeo, Milano	2008
[TAZ2000]	Tazzioli R.	Riemann, alla ricerca della geometria della natura	Supplemento a "Le scienze" – I grandi della scienza, anno III, n.14, aprile	2000
[TAZ2002]	Tazzioli R.	Gauss, principe dei matematici e scienziato poliedrico	Supplemento a "Le scienze" – I grandi della scienza, anno V, n.28, ottobre	2000
[TOG]	Togliatti E.	Cesaro, Ernesto in Dizionario biografico degli italiani, XXIV,	Istituto dell'Enciclopedia Italiana, Roma	1980
[TOR]	Toretti R.	Philosophy of Geometry from Riemann to Poincaré, (seconda edizione)	Reidel	1984

[VAL]	Valente K.	Giving Wings to Logic: Mary Everest Boole's Propagation and Fulfilment of a Legacy.	Br. Jour. for the Hist. of Sci., 43, pp. 49 – 74.	2010
[WEE]	Weeks J.	The Shape of Space	Taylor & Francis	1985
[XTG]		Xla tangente, Percorsi della matematica, n.6, novembre 2007 http://www.xlatangente.it/page.php?id=1486		2007

Sitografia

Geometrygames.org	(aggiornato al 6 gennaio 2017) di Jeff Weeks, topologo, allievo della medaglia Fields William Thurston. Contiene: Torus games; Kaleido paint; Kaleido tile; Curved spaces; Labirinto 4D; 4D Draw, tutti programmi con fini soprattutto didattici, destinati a familiarizzare gli studenti con varie forme dello spazio.
http://www.math.brown.edu/~banchoff/Video-DVD.html	I video di Thomas Banchoff su proiezione e sezione di ipercubo e ipersfera
http://www.math.union.edu/~dpvc/math/4D/welcome.html	I video di Davide Cervone su proiezione e sezione di ipercubo e ipersfera
http://www.geom.uiuc.edu/	Attualmente non più operante, ma ancora raggiungibile per i vecchi video e il Geometry Center
http://www-cabri.imag.fr/abracadabri/GeoNonE/GeoNonE.htm	Sito per la didattica degli spazi non euclidei attraverso l'uso di CABRI
irem.univ-reunion.fr/	Sito per la didattica degli spazi non euclidei attraverso l'uso di CABRI

http://www.matematita.it/	Sito molto interessante per la didattica della matematica in italiano
http://www.mateinitaly.it/	Sito molto interessante per la didattica della matematica in italiano

Indice analitico

A

B

C

D

E

F

G

H

J

K

L

M

N

P

R

S

T

V

W

Z